Universidade Técnica de Lisboa
Instituto Superior Técnico

Controlo Comutado Baseado em Modelos Múltiplos

Luís Miguel de Mendonça Rato
(Mestre)

Dissertação para Obtenção do Grau de Doutor em Engenharia Electrotécnica e de Computadores

Orientador: Doutor João Manuel Lage de Miranda Lemos

Presidente: Reitor da Universidade Técnica de Lisboa

Vogais: Doutor João Manuel Lage de Miranda Lemos
Doutor António Manuel dos Santos Pascoal
Doutor Miguel Afonso Dias de Ayala Botto
Doutora Teresa Maria de Gouveia Torres Feio Mendonça
Doutor Rui Alexandre Nunes Neves da Silva
Doutor João Fernando Cardoso Silva Sequeira

Março de 2002

Controlo Comutado Baseado em Modelos Múltiplos

URL: http://www.di.uevora.pt/~lmr/tese-phd.ps

INESC-ID, R. Alves Redol, 9, 1000 Lisboa
Universidade de Évora, R. Romão Ramalho, 59, 7000 Évora

Resumo

Esta tese aborda o problema do controlo comutado usando modelos múltiplos. O controlo comutado surge como uma das formas para lidar com sistemas variáveis no tempo, não lineares, ou modelados de forma inexacta. A comutação entre diversos controladores permite a estabilização do sistema em diferentes condições de funcionamento, as quais são representadas pelo conjunto dos modelos associado ao processo. Em cada instante, cabe ao mecanismo de supervisão a tarefa de identificar o processo entre os modelos admitidos *a priori*, escolher o controlador correspondente, e comutar entre controladores de forma a garantir a estabilidade do sistema controlado. As contribuições mais importantes desta tese dizem respeito aos sistemas variáveis no tempo. O problema do controlo comutado de sistemas variáveis no tempo é estudado do ponto de vista da estabilidade e da robustez, sendo derivadas condições suficientes para a estabilidade do sistema em cadeia fechada. A introdução *a priori*, no mecanismo de supervisão, de informação sobre as características estocásticas da variação do processo é feita através da utilização de modelos de Markov. São apresentados resultados experimentais e de simulação com aplicações de sistemas de controlo comutados: controlo de temperatura de saída de um campo de colectores solares, e controlo tolerante a falhas num sistema de três tanques.

Palavras-chave: Controlo Comutado, Variável no tempo, Modelos Múltiplos, Markov, Energia Solar

Abstract

This thesis concerns discrete-time multiple model based switching control. The switching control technique arises for dealing with time varying, nonlinear or imprecisely modelled systems. Switching among controllers allows the stabilisation of the system in several different operating conditions, which are described by the set of admissible models. At each instant the supervisor must identify the process by comparing its output with the ones of a priori defined models and switch among controllers ensuring the controlled system stability. The most important contributions of this thesis concern time varying systems. The problem of applying switching control to time varying plants is analysed from the point of view of stability and robustness. Sufficient conditions to ensure closed loop stability are obtained. Inclusion in the supervisor of a priori information about the dynamics stochastic variation is performed by using Markov models. Experimental as well as simulation results of switching control are presented: switching control of a distributed collector solar field and multiple model switching based fault tolerant control of a three tank system.

Keywords: Switching Control, Time Varying, Multiple Model, Markov, Solar Energy

Agradecimentos

Este trabalho foi realizado sob a orientação do Prof. João de Miranda Lemos. Gostaria de expressar os meus agradecimentos ao meu orientador, o Prof. João de Miranda Lemos, pelo apoio sempre prestado muito para além da estrita orientação dos meus trabalhos de doutoramento; ao meus amigos e colegas, do Grupo de Controlo de Sistemas Dinâmicos do INESC pelo seu companheirismo e pelo ambiente de trabalho sempre estimulante que aí senti; ao INESC pelos meios que pôs à minha disposição para a realização deste trabalho; e ao Prof. Edoardo Mosca pelas estimulantes estadias que me proporcionou no departamento de sistemas e informática da Universidade de Florença. Parte deste trabalho foi realizado no âmbito do projecto PRAXIS-HORUS - Controlo de Campos de Colectores Solares, n.3/3.1/CEG/2605/95 na *Plataforma Solar de Almeria*, tendo recebido financiamento da JNICT/FCT - PRAXIS XXI através da bolsa de doutoramento BD/2747/94, durante a qual o INESC (e INESC-ID) - Instituto de Engenharia de Sistemas e Computadores, foi a instituição de acolhimento do bolseiro.

Durante a realização deste trabalho a participação nos *COSY Workshops* decorreu no âmbito do programa COSY - *Control of Complex Systems*, promovido pela *European Science Foundation*, ESF-COSY-Theme 2.

Nomenclatura

$|.|$ - Módulo

$\|x\|_n$ - Norma do vector x, $(x_1^n + n_2^n + ... + x_p^n)^{\frac{1}{n}}$

$\|.\|$ - Uma norma de um vector, (norma euclidiana por omissão)

$\|.\|_\lambda$ - Uma norma λ-ponderada

$\Phi_A(.,.)$ - Matriz de Transição de um sistema linear com a matriz da dinâmica A.

$\lambda(A)$ - Valores próprios da matriz A.

$Diag(a, b, c, ...)$ - Matriz diagonal com entradas $a, b, c, ...$ na diagonal principal.

E - Estimador.

C - Controlador.

K - Controlador.

P - Processo.

D - Avaliador de desempenho.

S - Mecanismo de comutação.

λ_E - Magnitude máxima dos valores próprios do estimador.

λ_C - Magnitude máxima dos valores próprios do controlador.

λ_π - Magnitude máxima dos valores próprios do avaliador de desempenho.

λ_ω - Magnitude máxima dos valores próprios dos modos não controláveis ou não observáveis do processo.

λ_{CL} - Magnitude máxima (definida por projecto) dos valores próprios do processo em cadeia fechada com o controlador.

u - Saída do controlador.

y - Saída do processo.

$\hat{y}$ - Saída do processo.

e_T - Erro de seguimento.

r - Referência.

e_i - Erro de predição dos estimadores.

q - Índice do controlador.

σ - Índice do controlador activo dado pelo supervisor.

p - Índice de um modelo.

p^* - Índice do processo.

$\mathcal{P}$ - Conjunto dos índices dos controladores/modelos.

$\mathcal{P}^*$ - Subconjunto dos índices dos controladores/modelos.

Índice

1. Introdução

Neste capítulo faz-se uma motivação para os problemas abordados, descreve-se a estrutura de controlo considerada e assinalam-se as principais contribuições desta tese.

1.1 Motivação

O grande número de resultados existentes para a teoria dos sistemas lineares ou linearizados proporciona a existência de uma grande quantidade de métodos de projecto de controladores para sistemas lineares. Devido a este facto, o projecto de controladores pressupõe com frequência modelos lineares e de complexidade reduzida. No entanto, a engenharia de controlo depara-se, muito frequentemente, com processos de complexidade elevada, não lineares, variáveis no tempo, ou modelados de forma inexacta. Assim, o projecto de controladores robustos e/ou a variação dos parâmetros do controlador surgem, na engenharia de controlo, como respostas naturais às dificuldades referidas.

Do ponto de vista da teoria do controlo, a variação dos parâmetros pode ser encarada de diversas perspectivas. O controlo adaptativo procura resolver principalmente o problema do seguimento de variações lentas do processo [3, 31, 63]. Os métodos de selecção de ganhos (*gain scheduling*) são aplicáveis quando existe um conhecimento *a priori* da variação das características do processo em função de uma variável de selecção acessível [13, 40, 56]. Na ausência de uma variável de selecção e em presença de variações rápidas (ainda que infrequentes) da dinâmica do processo o controlo robusto surge como uma possível solução. No entanto, facilmente se constata a existência de processos que não podem ser controlados com um único controlador linear [44], sugerindo uma abordagem baseada em múltiplos controladores/modelos. Note-se ainda que, nos casos em que não existe uma excitação persistente do processo, as técnicas clássicas de controlo adaptativo baseadas na estimação recursiva de mínimos quadrados não garantem a convergência dos algoritmos [18, 72, 49], podendo originar regimes transitórios com grande amplitude. O controlo comutado baseado em modelos múltiplos surge assim como a forma de abordar o problema do controlo de processos não lineares, processos com variações bruscas, ou processos com modelos incertos sem, no entanto, impor condições de excitação persistente ou o conhecimento *a priori* do sinal do ganho de alta frequência [44].

Estas abordagens não são, no entanto, incompatíveis, sendo possível combinar o controlo comutado com o controlo adaptativo ou o controlo por selecção de ganhos de forma a conjugar características das diferentes abordagens [54, 55].

1.2 Controlo Comutado - Estado da Arte

O controlo comutado (*switching control*) surge, deste modo, não só como uma abordagem para processos não lineares, modelados de forma inexacta, ou cujas características sofram variações imprevisivelmente, mas sobretudo como uma forma de atacar estes problemas relaxando o conhecimento *a priori* e as restrições à dinâmica do processo [16, 41, 42, 45, 54].

Este trabalho centra-se no problema do controlo comutado baseado em modelos múltiplos para sistemas discretos, e segue de perto a estrutura de controlo apresentada em [46, 47] para sistemas contínuos, com a respectiva contrapartida para sistemas discretos [8]. Ao contrário de outros trabalhos existentes a ênfase é porém posta nos sistemas variáveis no tempo.

No controlo comutado baseado em modelos múltiplos, a cada modelo corresponde um controlador, o qual satisfaz certas propriedades na cadeia fechada modelo/controlador (estabilidade, robustez, desempenho, etc.). A comutação entre controladores é da responsabilidade do supervisor o qual desempenha as seguintes tarefas.

- Comparação entre o processo e a família de modelos (definida *a priori*).
- Atribuição de um peso a cada modelo de acordo com o grau de aproximação ao processo.
- Escolha do controlador correspondente ao modelo mais aproximado do processo de acordo com o critério considerado.
- Comutação para o controlador escolhido.

Para a análise dos sistemas de controlo comutados baseados em múltiplos modelos lineares do ponto de vista da estabilidade, robustez ou desempenho, a análise dos sistemas lineares comutados constitui um passo fundamental.

Sistemas lineares comutados

É sabido que a estabilidade de sistemas lineares variáveis no tempo não é garantida se apenas se tiver em conta os valores próprios do sistema em cada instante. Deste modo, é fácil construir exemplos de sistemas lineares que comutando entre dinâmicas estáveis resultam num sistema instável. Existem diversas condições suficientes para a estabilidade de sistemas lineares comutados [1, 30, 45], que dependem apenas de propriedades das matrizes da dinâmica. Uma categoria de condições suficientes para a estabilidade do sistema, utilizada neste trabalho, é construída com base no conceito de *tempo de permanência* (*dwell-time*) [43, 23]. O tempo de permanência de um sistema linear define o intervalo de tempo mínimo entre variações da dinâmica do sistema linear, e traduz a noção intuitiva de que a comutação entre sistemas lineares estáveis invariantes não origina um sistema instável se estas ocorrerem de forma suficientemente espaçada no tempo. Este conceito de tempo de permanência pode ser estendido para uma forma mais geral, de modo a considerar a comutação entre sistemas lineares variáveis no tempo. A responsabilidade pela comutação entre controladores cabe ao supervisor que impõe o tempo de permanência dos controladores, assegurando assim a estabilidade do sistema em cadeia fechada.

Sistemas de controlo comutados

O projecto de sistemas de controlo comutados pode-se dividir, em primeira aproximação, em dois problemas independentes [2]:

- Projecto dos controladores, incluindo a escolha do número de modelos/controladores e escolha dos modelos nominais.
- Algoritmo de supervisão e comutação, incluindo a geração dos sinais de desempenho dos estimadores, e o algoritmo de comutação.

Apesar de existirem alguns trabalhos que se debruçam sobre a primeira destas questões [2, 58], a maioria dos trabalhos centram-se na segunda questão: a estabilidade dos sistemas controlados - contínuos [46] ou discretos [8]; sistemas comutados com adaptação de modo a melhorar as respostas transitórias [54, 55]; sistemas comutados em processos não lineares [22]; análise de diversos algoritmos de comutação - baseados no tempo de permanência [43, 23], em comutação cíclica [57], em histerese [45], ou histerese normalizada [24]; a geração de sinais de desempenho por filtragem de modo a melhorar a inferência de desempenho em cadeia fechada na presença de dinâmica não modelada [51, 52]; e a robustez de estabilidade de sistemas de controlo comutados [47, 48]. Neste trabalho aborda-se sobretudo o problema do controlo comutado de uma classe de sistemas variáveis no tempo.

1.3 Estrutura e resumo da tese

A tese está estruturada do seguinte modo:

Capítulo 1 - Introdução

No primeiro capítulo é feita a motivação para o problema, apresenta-se a estrutura da tese e as principais contribuições.

Capítulo 2 - Sistemas lineares comutados

Apresentam-se teoremas básicos e as definições usadas nas análises teóricas dos capítulos seguintes. Apresentam-se ainda alguns exemplos intuitivos que servem de motivação para as estratégias de comutação de controladores usadas.

Capítulo 3 - Controlo Comutado com Perturbações Acessíveis

A ocorrência de perturbações externas no processo a controlar provoca inevitavelmente uma degradação do desempenho do sistema controlado. Esta degradação de desempenho ocorre, quer devido à perturbação no seguimento da referência, quer pelo desajuste entre o processo e os modelos, o qual pode dar origem a decisões erradas por parte do supervisor. Assim, a inclusão das perturbações acessíveis na estrutura do controlador (controlo antecipativo) e nos modelos do processo surge como uma extensão natural aos sistemas de controlo comutados. Esta estrutura de controlo é estudada do ponto de vista da estabilidade, para processos invariantes no tempo. Neste trabalho extendem-se a processos com perturbações acessíveis os resultados de [46].

Capítulo 4 - Controlo Comutado em Processos Variáveis no Tempo

Para processos variáveis no tempo a estrutura de controlo comutado descrita anteriormente não garante a estabilidade do sistema controlado. Deste modo, é necessária a introdução de condições adicionais sobre o comportamento do processo. Essas condições impõem um tempo de permanência para o processo e reflectem o conceito intuitivo de que, se um processo variar lentamente, então a estabilidade desse processo controlado (o qual é um sistema variável no tempo) pode ser garantida a partir da estabilidade de cada processo controlado, considerando o processo invariante no tempo.

Capítulo 5 - Robustez face a dinâmica não modelada

Neste capítulo averigua-se a existência de margem de robustez para o sistema controlado, garantindo a estabilidade do controlador comutado para sistemas variáveis no tempo.

Capítulo 6 - Controlo Comutado baseado em modelos de Markov

Considerando a variação de comportamento do processo modelada por um processo de Markov conhecido *a priori*, o supervisor pode incluir essa informação na avaliação de desempenho dos modelos. O supervisor passa a fazer a estimação dos modelos usando um método de filtragem/predição estocástica baseada em modelos de Markov Escondidos (*Hidden Markov Models*) [60, 61]. A interpretação probabilística do filtro/preditor estocástico sugere a utilização de pesos variáveis na escolha do controlador. Deste modo, testa-se em [34] o fecho da cadeia de controlo por um controlador cujos parâmetros são o resultado da média ponderada dos diversos controladores. No entanto, a interpolação dos parâmetros de dois controladores estabilizantes não gera necessariamente um controlador estabilizante. Tal só se verifica se as raízes dos polinómios do controlador (a interpolar) se encontrarem suficientemente aproximadas entre si e afastadas da zona de instabilidade, ou seja no interior do círculo unitário, no caso de sistemas discretos.

Capítulos 7 e 8 - Resultados Experimentais e Simulações

Neste trabalho são apresentados resultados experimentais e simulações de controladores comutados com dois processos piloto, o primeiro dos quais de escala industrial: o campo de colectores solares de Almeria e um sistema de três tanques.

O Campo de colectores solares ACUREX da *Plataforma solar de Almeria*, em Espanha, constitui um processo experimental de escala industrial [10, 68]. O campo é constituído por concentradores cilíndrico-parabólicos com uma área total de 2672 m^2 e com a capacidade de fornecer 1.2 MW de potência máxima. Relativamente a este processo, para além de simulações em computador, foram realizados ensaios experimentais no próprio campo.

O sistema de três tanques considerado, é um processo piloto de pequena escala composto por três tanques interligados de modo a ter, por construção, um certo grau de redundância. Este processo foi utilizado como termo de comparação (*benchmark process*) para teste e comparação de sistemas de controlo com tolerância a avarias, sistemas de detecção de falhas, e análise de reconfigurabilidade de sistemas de controlo, por diversos grupos participantes na rede COSY[1]-*Control of Complex Systems* [21].

Capítulo 9 - Conclusões Apresentam-se as conclusões finais e enumeram-se alguns dos problemas em aberto suscitados neste trabalho.

[1]COSY - *Control of Complex Systems* é uma rede patrocinada pela ESF(*European Science Foundation*) composta por quatro temas: *Control of Non-Linear and Uncertain Systems, Fault-Tolerant Control Systems, Learning Control Systems, Integration of Complex control Systems*

1.4 Contribuições desta tese

As principais contribuições apresentadas nesta tese são:

- Modificação do algoritmo de controlo comutado com a inclusão de uma componente antecipativa, de modo a incorporar a informação proveniente de perturbações acessíveis.
- Estudo da estabilidade de sistemas variáveis no tempo usando o algoritmo de controlo comutado.
- Estudo da robustez de estabilidade de sistemas variáveis no tempo usando o algoritmo de controlo comutado.
- Modificação do supervisor do controlador comutado, de modo a incluir o conhecimento *a priori* sobre as variações de comportamento do processo, descritas por modelos de Markov.
- Aplicação de um algoritmo de controlo comutado num processo de escala industrial, o campo de colectores solares - ACUREX - da Plataforma Solar de Almeria.

2. Sistemas Lineares Comutados

Neste capítulo analisa-se a questão da estabilidade (interna e do ponto de vista entrada-saída) de sistemas discretos lineares comutados e apresentam-se alguns conceitos básicos aplicáveis a sistemas lineares comutados (variáveis no tempo ou não).

2.1 Introdução

Considere-se o seguinte sistema linear variável no tempo

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A(k)x(k) + B(k)u(k) \\ y(k) &= C(k)x(k) + D(k)u(k) \end{aligned} \tag{2.1}$$

Em que $x(k) \in \mathcal{R}^n$ é o estado, $u(k) \in \mathcal{R}$ é a entrada manipulada, $y(k) \in \mathcal{R}$ é a saída e A, B, C, e D são matrizes com dimensões compatíveis. A evolução temporal do estado e da saída podem ser expressas por

$$x(k) = \Phi_A(k,k_0)x(k_0) + \sum_{i=k_0}^{k-1} \Phi_A(k,i+1)B(i)u(i) \tag{2.2}$$

$$y(k) = C(k)\Phi_A(k,k_0)x(k_0) + C(k)\sum_{i=k_0}^{k-1} \Phi_A(k,i+1)B(i)u(i) + D(k)u(k) \tag{2.3}$$

em que $\Phi_A(k,k_0)$, a matriz de transição associada à matriz da dinâmica $A(k)$, é dada por

$$\Phi_A(k,k_0) = \begin{cases} A(k-1)A(k-2)\ldots A(k_0) & k > k_0 \\ I & k = k_0 \end{cases} \tag{2.4}$$

Considere-se a seguinte definição de *sistemas lineares comutados com tempo de permanência*, a qual generaliza o caso da comutação entre sistemas lineares invariantes no tempo, para a comutação entre sistemas lineares (eventualmente variáveis no tempo).

Definição 2.1.1 *Sistema linear comutado, com tempo de permanência T_D, é um sistema linear variável no tempo, definido pelo conjunto de matrizes $\{A_{i(k)}(k), B_{i(k)}(k), C_{i(k)}(k), D_{i(k)}(k)\}$ em que o índice $i(k)$, pertencente ao conjunto dos índices possíveis $\mathcal{P}$, comuta apenas nos instantes $\{k_1, k_2, k_3, ...\} = \mathcal{T}_k$, tal que*

$$\forall_{j \in \mathcal{N}} \quad k_{j+1} - k_j > T_D$$

Note-se que, segundo a definição 2.1.1, entre instantes de comutação k_i o sistema pode ser variável.

A representação das matrizes com o sub-índice $_{i(k)}$, tem como objectivo pôr em evidência as variações que ocorrem apenas nos instantes $\{k_1, k_2, k_3, ...\}$, e parte do princípio que se conhecem propriedades de cada sistema definido por

$$\{A_i(k), B_i(k), C_i(k), D_i(k)\}$$

com i constante, as quais se pretende extender ao sistema definido por

$$\{A_{i(k)}(k), B_{i(k)}(k), C_{i(k)}(k), D_{i(k)}(k)\}$$

em que o índice $i(k)$ pode variar, sob certas restrições.

2.2 Estabilidade interna de sistemas lineares comutados

Antes de analisar o comportamento entrada-saída dos sistemas lineares comutados apresentam-se em seguida algumas condições de estabilidade interna para sistemas lineares variáveis no tempo.

Considere-se o sistema definido por

$$x(k+1) = A(k)x(k) \tag{2.5}$$

e uma norma de matrizes, que salvo indicação em contrário, se considera como a norma induzida pela norma euclidiana usada para vectores.

Definição 2.2.1 (Estabilidade exponencial [67]) *O sistema linear (2.5) com a matriz da dinâmica $A(k)$ é exponencialmente uniformemente estável sse existem constantes $\gamma > 1$ e $0 \leq \lambda < 1$, e uma norma $\|.\|$ tal que, para qualquer k_0 inteiro e condições iniciais x_0, a solução de (2.5) satisfaz*

$$\|x(k)\| \leq \gamma \lambda^{(k-k_0)} \|x(k_0)\| \quad para \;\; k > k_0$$

A estabilidade exponencial de (2.5) pode ser expressa em função da matriz $A(k)$ de acordo com os seguintes teoremas [67].

Teorema 2.2.1 ([67], teorema 22.7 pág. 426) *O sistema linear (2.5) com a matriz da dinâmica $A(k)$ é uniformemente exponencialmente estável sse existem constantes $\gamma > 1$ e $0 \leq \lambda < 1$, e uma norma induzida $\|.\|$ tal que, para qualquer k_0 e condições iniciais x_0, a matriz de transição associada a $A(k)$ satisfaz*

$$\|\Phi_A(k, k_0)\| \leq \gamma \lambda^{(k-k_0)} \quad para \quad k > k_0$$

No caso particular em que $A(k)$ é constante a estabilidade exponencial pode ser determinada analisando os valores próprios da matriz A.

Teorema 2.2.2 ([67], teorema 22.11 pág. 429) *O sistema linear (2.5) com a matriz da dinâmica $A(k) = A$ constante é exponencialmente estável sse a matriz A tem todos os valores próprios estrictamente dentro do círculo unitário.*

$$|\lambda(A)| < 1$$

Uma consequência dos teoremas 2.2.1 e 2.2.2 é o lema seguinte.

Lema 2.2.3 *Se a matriz da dinâmica, $A(k)$, do sistema (2.5) é constante e tem todos os valores próprios com módulo $|\lambda(A)| < \lambda_M < 1$ então o sistema é exponencialmente estável e,*

$$\exists_{\gamma>0 \;\; |\lambda(A)|<\lambda_M<1} \; : \|\Phi_A(k, k_0)\| \leq \gamma \lambda_M^{(k-k_0)} \quad para \quad k > k_0$$

Demonstração Ver apêndice a este capítulo, 2.A.

Dado que de uma forma geral não é possível calcular explicitamente $\Phi_A(k, k_0)$ põe-se a questão de saber em que condições o sistema (2.5) é estável. Existem diversas condições sobre a matriz da dinâmica $A(k)$ que garantem a estabilidade exponencial do sistema (2.5) [45].

Note-se que a exigência de que os valores próprios de cada $A(k)$ estejam localizados no interior do círculo unitário não constitui uma condição suficiente para garantir a estabilidade do sistema variável no tempo, (2.5), como se pode facilmente observar pelo exemplo seguinte.

Exemplo 2.1 Considerem-se as matrizes A_1, e A_2,

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1.0 & -0.5 \\ 1.0 & 0.0 \end{bmatrix} \tag{2.6}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -1.0 & -0.5 \\ 1.0 & 0.0 \end{bmatrix} \tag{2.7}$$

com os seguintes valores próprios

$$\lambda(A_1) = 0.5 \pm 0.5$$

$$\lambda(A_2) = -0.5 \pm 0.5$$

defina-se $A(k)$,

$$A(k) = \begin{cases} A_1 \text{ se } k \text{ é par} \\ A_2 \text{ se } k \text{ é ímpar} \end{cases} \tag{2.8}$$

A evolução do estado de (2.5) com $A(k) = A_1$ e condições iniciais $x(0) = [1\ 1]'$ pode observar-se na figura 2.1.

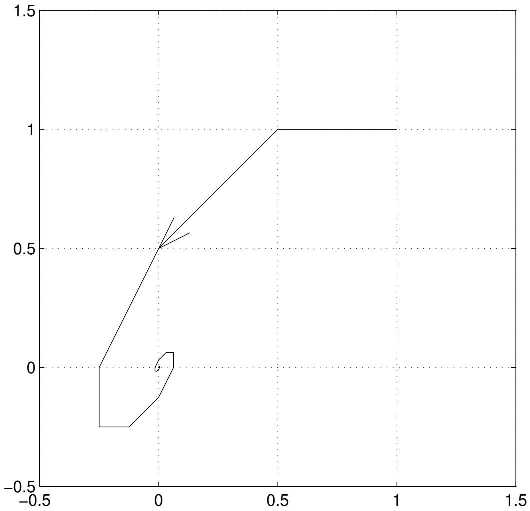

Fig. 2.1: Evolução do estado de (2.5) com $A(k) = A_1$

Caso $A(k)$ seja definida por (2.8), apesar de ambas as matrizes, A_1 e A_2, terem os valores próprios dentro do círculo unitário, o sistema (2.5) não é estável. Com efeito,

$$\Phi_A(k, k_0) = A(k) \ldots . A_1 A_2 A_1 A_2 \ldots A_s(k_0) \tag{2.9}$$

aplicando a associatividade, obtém-se

$$\Phi_A(k, k_0) = A(k) \ldots (A_1 A_2)(A_1 A_2) \ldots A_s(k_0) \tag{2.10}$$

assim,

$$\Phi_A(k, 0) = \begin{cases} (A_1 A_2)^{\frac{k}{2}} & \text{se } k \text{ é par} \\ A_2 (A_1 A_2)^{\frac{(k-1)}{2}} & \text{se } k \text{ é ímpar} \end{cases} \tag{2.11}$$

observem-se os valores próprios do produto das matrizes $A_1 A_2$

$$\lambda(A_1 A_2) = \{-1.8660, -0.1340\}$$

Dado que um dos valores próprios tem módulo superior à unidade o sistema é instável. A evolução do estado do sistema (2.5), com $A(k)$ definida por (2.8), e com condições iniciais $x(0) = [1\ 1]'$, pode ser observada na figura 2.2.

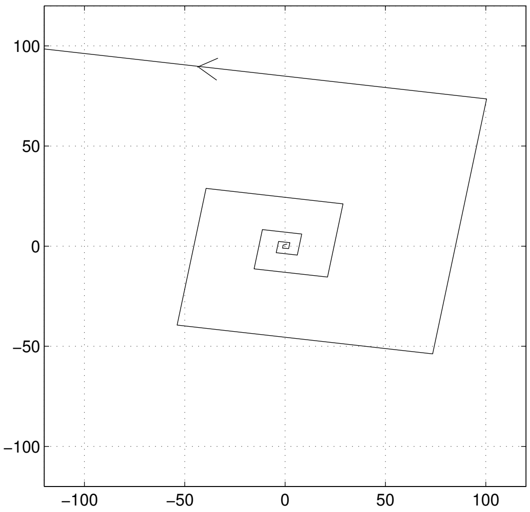

Fig. 2.2: Evolução do estado de (2.5) com $A(k)$ variável.

■

Teorema 2.2.4 *Seja um conjunto finito de matrizes $A_i(k)$, tal que os sistemas lineares*

$$x(k+1) = A_i(k)x(k) \tag{2.12}$$

são exponencialmente estáveis para qualquer i constante, e $i \in \mathcal{P}$, ou seja

$$\|\Phi_{A_i}(k, k_0)\| \leq \gamma_i \lambda_i^{k-k_0} \tag{2.13}$$

então existe um tempo de permanência T_D tal que, o sistema linear comutado,

$$x(k+1) = A_{i(k)}(k)x(k) \tag{2.14}$$

é uniformemente exponencialmente estável, e existem γ, λ tal que

$$\|\Phi_A(k, k_0)\| \leq \gamma \lambda^{k-k_0} x(k) \tag{2.15}$$

com

$$\lambda \geq max\{\gamma_i^{\frac{1}{T_D}} \lambda_i\} \tag{2.16}$$

Demonstração Sejam k_i os instantes em que a matriz de transição comuta,

$$\{k_1, k_{,2}, k_3, ...\} \in \mathcal{T}_k$$

Assim, a matriz de transição mantém-se constante nos instantes k, tal que

$$k_i \leq k < k_{i+1} \qquad i = 1, 2, 3... \tag{2.17}$$

deste modo a matriz de transição pode decompor-se na forma

$$\Phi_A(k, k_0) = \Phi_{A_0}(k_1, k_0)\Phi_{A_1}(k_2, k_1)...\Phi_{A_j}(k_{j+1}, k_j)\Phi_{A_{j+1}}(k, k_{j+1}) \tag{2.18}$$

donde, considerando a norma $\|.\|$ induzida pela norma euclidiana, tem-se

$$\|\Phi_A(k, k_0)\| \leq \|\Phi_{A_0}(k_1, k_0)\| \, \|\Phi_{A_1}(k_2, k_1)\| \, ...\|\Phi_{A_j}(k_{j+1}, k_j)\| \, \|\Phi_{A_{j+1}}(k, k_{j+1})\| \tag{2.19}$$

Aplicando o lema 2.2.3 para cada intervalo $k_i \leq k < k_{i+1}$ obtém-se

$$\|\Phi_{A_i}(k_{i+1}, k_i)\| \leq \gamma_i \lambda_i^{k_{i+1}-k_i} \tag{2.20}$$

defina-se o tempo, $T_{Di} > 0$ e λ tal que,

$$\lambda_i < \gamma_i^{\frac{1}{T_{Di}}} \lambda_i \leq \lambda < 1 \tag{2.21}$$

e admita-se que dois instantes consecutivos $\{k_i, k_{i+1}\}$ satisfazem

$$k_{i+1} - k_i \geq T_{Di} \tag{2.22}$$

Assim, como $\gamma_i > 1$, segundo a definição 2.2.1, tem-se

$$\gamma_i < \gamma_i^{\frac{k_{i+1}-k_i}{T_{Di}}} \tag{2.23}$$

de (2.20),

$$\|\Phi_{A_i}(k_{i+1}, k_i)\| \leq \gamma_i^{\frac{k_{i+1}-k_i}{T_{Di}}} \lambda_i^{k_{i+1}-k_i} \tag{2.24}$$

$$\|\Phi_{A_i}(k_{i+1}, k_i)\| \leq (\gamma_i^{\frac{1}{T_{Di}}} \lambda_i)^{k_{i+1}-k_i} \tag{2.25}$$

com (2.21) obtém-se (para todos os intervalos à excepção do primeiro e último)

$$\|\Phi_{A_i}(k_{i+1}, k_i)\| \leq \lambda^{k_{i+1}-k_i} \tag{2.26}$$

Para o primeiro e último intervalos, $\Phi_{A_0}(k_1, k_0)$ e $\Phi_{A_{j+1}}(k, k_{j+1})$, aplicando o lema 2.2.3, obtém-se

$$\|\Phi_{A_0}(k_1, k_0)\| \leq \gamma_0 \lambda_0^{k_1-k_0} \tag{2.27}$$

$$\|\Phi_{A_{j+1}}(k, k_{j+1})\| \leq \gamma_{j+1} \lambda_{j+1}^{k-k_{j+1}} \tag{2.28}$$

assim, de (2.26), (2.27), e (2.28)

$$\|\Phi_A(k, k_0)\| \leq \gamma_0 \lambda_0^{k_1-k_0} \, \lambda_1^{k_2-k_1} ... \lambda_j^{k_{j+1}-k_j} \, \gamma_{j+1} \lambda_{j+1}^{k-k_{j+1}} \tag{2.29}$$

$$\|\Phi_A(k,k_0)\| \leq \gamma_0\gamma_{j+1}\,\lambda_0^{k_1-k_0}\,\lambda_1^{k_2-k_1}...\lambda_j^{k_{j+1}-k_j}\,\lambda_{j+1}^{k-k_{j+1}} \tag{2.30}$$

dado que $\lambda_i < \lambda$ para qualquer i

$$\|\Phi_A(k,k_0)\| \leq \gamma_0\gamma_{j+1}\,\lambda^{k_1-k_0}\,\lambda^{k_2-k_1}...\lambda^{k_{j+1}-k_j}\,\lambda^{k-k_{j+1}} \tag{2.31}$$

$$\|\Phi_A(k,k_0)\| \leq \gamma_0\gamma_{j+1}\,\lambda^{k_1-k_0+\sum_{i=1}^{j}(k_{i+1}-k_i)+k-k_{j+1}} \tag{2.32}$$

$$\|\Phi_A(k,k_0)\| \leq \gamma_0\gamma_{j+1}\,\lambda^{k_1-k_0+(k_{j+1}-k_1)+k-k_{j+1}} \tag{2.33}$$

definindo γ de acordo com,

$$\gamma = \max_{i,p\in\mathcal{P}}\{\gamma_i\gamma_p\} \tag{2.34}$$

para qualquer i e p, então

$$\|\Phi_A(k,k_0)\| \leq \gamma\;\lambda^{k-k_0} \tag{2.35}$$

Pelo lema 2.2.3 pode assim concluir-se que o sistema é exponencialmente uniformemente estável. Note-se que é sempre possível encontrar T_D e λ de modo a satisfazer, para qualquer i, a condição

$$\lambda_i < \gamma_i^{\frac{1}{T_D}}\lambda_i \leq \lambda < 1 \tag{2.36}$$

Defina-se T_{Di}

$$T_{Di} > \frac{\ln(\frac{1}{\gamma_i})}{\ln(\lambda_i)} \tag{2.37}$$

Para T_D tome-se um majorante de T_{Di}

$$T_D \geq \max_i\{T_{Di}\} \tag{2.38}$$

e para λ tome-se um majorante de $\gamma_i^{\frac{1}{T_D}}\lambda_i$

$$\lambda \geq \max_i\{\gamma_i^{\frac{1}{T_D}}\lambda_i\} \tag{2.39}$$

Tem-se assim, γ, T_D, e λ, definidos por (2.34), (2.2), e (2.39), tal que, satisfazem (2.35), como se queria demonstrar.

■

Note-se que quando se faz T_D tender para infinito,

$$\max_i\{\gamma_i^{\frac{1}{T_D}}\lambda_i\} \;\rightarrow\; \max_i\{\lambda_i\} \tag{2.40}$$

O decaimento é pelo menos tão lento como $\max_i\{\lambda_i\}$. No caso particular em que $A_i(k) = A_i$, ou seja se a matriz A é constante entre instantes de comutação, obtém-se o lema seguinte.

Lema 2.2.5 *Para qualquer conjunto finito de matrizes A_i constantes com valores próprios estrictamente estáveis, $|\lambda(A_i)| \leq \varepsilon < 1$, existe um tempo de permanência T_D tal que, o sistema linear comutado, com tempo de permanência T_D,*

$$x(k+1) = A_{i(k)}x(k) \tag{2.41}$$

é uniformemente exponencialmente estável.

Demonstração Pelo teorema 2.2.2 os sistemas lineares invariantes definidos pelas matrizes A_i são exponencialmente estáveis donde, pelo teorema 2.2.4, é imediato concluir que o sistema linear comutado (2.41) é exponencialmente estável.

∎

Os exemplos apresentados a seguir dão uma interpretação geométrica e intuitiva do teorema 2.2.5.

Exemplo 2.2

Considere-se o sistema linear

$$x(k+1) = A_{i(k)}x(k) \tag{2.42}$$

onde a matriz $A_{i(k)}$ comuta entre A_1 e A_2, dadas por

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1.1700 & -0.2200 \\ 0.4400 & 0.7300 \end{bmatrix} \tag{2.43}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0.7300 & -0.2200 \\ 0.4400 & 1.1700 \end{bmatrix} \tag{2.44}$$

Ambas as matrizes, A_1 e A_2 têm valores próprios estáveis,

$$\lambda(A_1) = \lambda(A_2) = 0.95 \pm i0.22$$

$$\|\lambda(A_1)\| = \|\lambda(A_2)\| = 0.9751$$

e a matriz $A_{i(k)}$ comuta todos os instantes $k\,T_D$.

As figuras 2.3 e 2.4 mostram a evolução do estado quando $A_{i(k)} = A_p$ é constante, para $p = 1$ e $p = 2$, respectivamente. Se o índice p comuta entre 1 e 2 cada 10 instantes de amostragem ($T_D = 10$) o sistema resultante é instável, como se pode observar na figura 2.5.

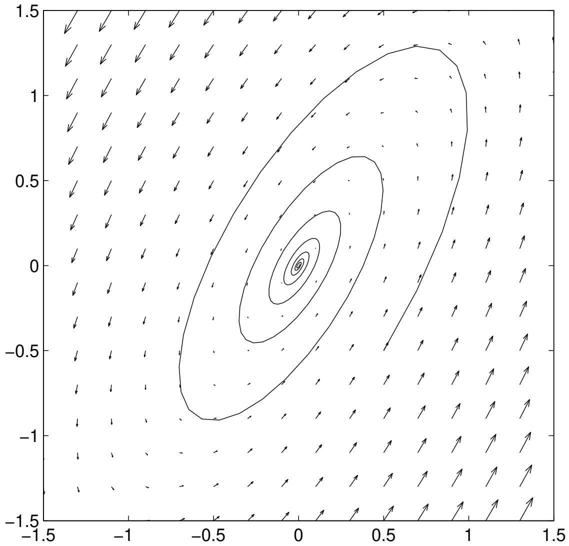

Fig. 2.3: Trajectória do estado com $A_{i(k)} = A_1$.

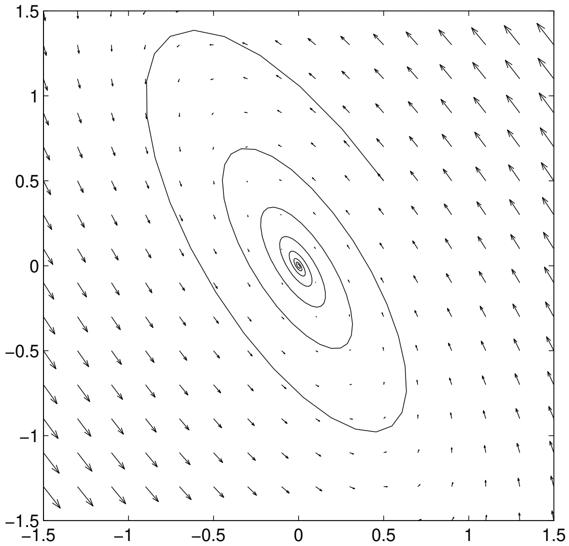

Fig. 2.4: Trajectória do estado com $A_{i(k)} = A_2$.

Deste modo, surge a seguinte questão: - Quantos instantes devem existir entre comutações sucessivas $\{k_i, k_{i+1}\}$ de modo que a norma do estado no instante k_{i+1} seja irreversivelmente menor que a norma do estado no instante k_i. Por outras palavras qual o valor mínimo de $k_{i+1} - k_i$ tal que,

$$\forall_{k \geq k_{i+1}} \|x(k)\| < \|x(k_i)\| \tag{2.45}$$

Considere-se o caso mais desfavorável que acontece quando o estado inicial está no mínimo da elongação da trajectória. A figura 2.6 mostra a trajectória do estado de (2.42) para $p = 2$, em que o estado inicial é indicado na figura por "x0". Após o ponto marcado por "td" a norma do estado, $\|x(k)\|$, é irreversivelmente menor que $\|x_o\|$.

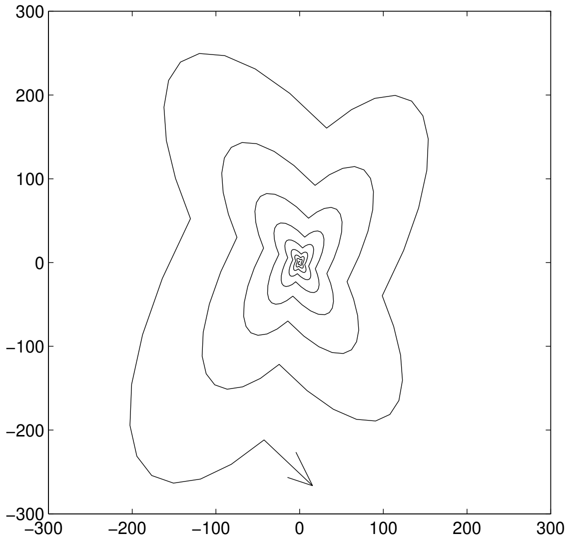

Fig. 2.5: Trajectória do estado com T_D=10.

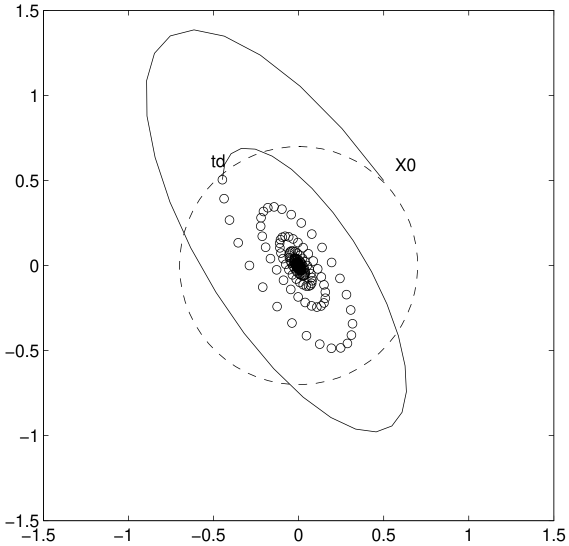

Fig. 2.6: Trajectória do estado com $A(k) = A_2$, antes de td (linha contínua), após td (linha tracejada)

Seja T_{D_p} o intervalo de tempo necessário para garantir (2.45), e tome-se o majorante dos T_{D_p} ,

$$T_D \geq \max_p(T_{D_p})$$

então a estabilidade do sistema é garantida. Uma estimativa do intervalo T_D que garante a estabilidade do sistema comutado pode ser obtida de (2.37) e (2.38).

$$T_D > \max_i\{log(\frac{1}{\|T\|\,\|T^{-1}\|})\frac{1}{log(|\lambda_i|)}\}$$

$$T_D > \max_i\{log(\frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}})\frac{1}{log(|\lambda_i|)}\} \tag{2.46}$$

em que σ_{min} e σ_{max} são o mínimo e o máximo valores singulares da matriz T que diagonaliza A_p. Utilizando a expressão (2.46) obtém-se a seguinte estimativa

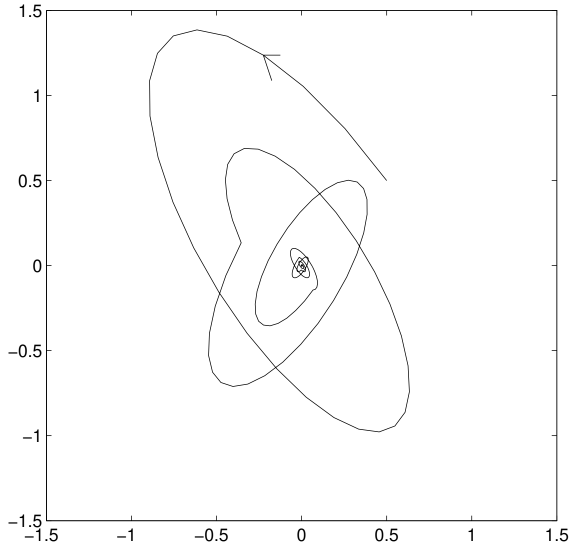

Fig. 2.7: Trajectória do estado do sistema linear comutado com tempo de permanência $T_D = 40$

$$T_D > 38.168$$

A figura 2.7 mostra a trajectória do estado do sistema comutado (com $T_D = 40$), e a figura 2.8 mostra a evolução no tempo da norma do estado do sistema.

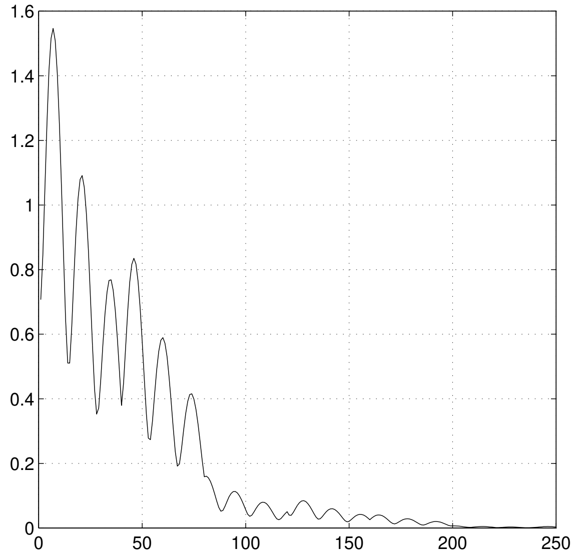

Fig. 2.8: Norma do estado do sistema linear comutado com tempo de permanência $T_D = 40$

■

2.3 Relação entrada-saída de sistemas lineares comutados

Considere-se o seguinte sistema linear não homogéneo,

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A_{i(k)}(k)x(k) + B_{i(k)}(k)u(k) \\ y(k) &= C_{i(k)}(k)x(k) + D_{i(k)}(k)u(k) \end{aligned} \tag{2.47}$$

que tem como solução,

$$x(k) = \Phi_A(k,k_0)x(k_0) + \sum_{j=k_0}^{k-1} \Phi_A(k,j+1)B_{i(j)}(j)u(j) \tag{2.48}$$

$$y(k) = C_{i(k)}(k)\Phi_A(k,k_0)x(k_0) + C_{i(k)}(k)\sum_{j=k_0}^{k-1} \Phi_A(k,j+1)B_{i(j)}(j)u(j) + D_{i(k)}(k)u(k) \tag{2.49}$$

em que $\Phi_A(k,k_0)$ é a matriz de transição associada à matriz da dinâmica $A_{i(k)}(k)$.

Se os sistemas lineares definidos por $A_{i(k)}$ são uniformemente exponencialmente estáveis (para cada índice $i(k)$ constante) então, o teorema 2.2.4 garante a existência de um tempo de permanência T_D, e de constantes $\gamma > 1$ e $0 \leq \lambda < 1$ tal que,

$$\forall_{k>k_0} \|\Phi_A(k,k_0)\| \leq \gamma\lambda^{k-k_0} \tag{2.50}$$

Nessas condições, o comportamento, em termos de relação entrada-saída, do sistema linear comutado (2.47), com tempo de permanência T_D, e entrada u tal que

$$|u(k)| \leq u_0 \tag{2.51}$$

é estabelecido pelo lema seguinte:

Lema 2.3.1 *Considere-se o sistema linear (2.47), em que* $\{A_{i(k)}, B_{i(k)}, C_{i(k)}, D_{i(k)}\}$ *têm norma limitada, e a matriz de transição* $\Phi_A(k,k_0)$ *(associada à matriz da dinâmica* $A_{i(k)}$*) é tal que*

$$\|\Phi_A(k,k_0)\| \leq \gamma\lambda^{k-k_0}$$

e

$$|u(k)| \leq u_0$$

então, (2.47) tem estado e saída limitada e o estado x *é tal que*

$$\|x(k)\| \leq \gamma\lambda^{k-k_0}\|x(k_0)\| + \frac{\gamma}{1-\lambda}u_0 \tag{2.52}$$

Demonstração Dada a solução do sistema linear (2.47),

$$x(k) = \Phi_A(k,k_0)x(k_0) + \sum_{j=k_0}^{k-1} \Phi_A(k,j+1)B_i(j)u(j) \tag{2.53}$$

$$y(k) = C_i(k)\Phi_A(k,k_0)x(k_0) + C_i(k)\sum_{j=k_0}^{k-1} \Phi_A(k,i+1)B_i(j)u(j) + D_i(k)u(k) \tag{2.54}$$

considerem-se os seguintes majorantes,

$$\|A_i(k)\| \leq a \tag{2.55}$$

$$\|B_i(k)\| \leq b \tag{2.56}$$

$$\|C_i(k)\| \leq c \tag{2.57}$$

$$\|D_i(k)\| \leq d \tag{2.58}$$

De (2.54) tem-se,

$$\|x(k)\| \leq \|\Phi_A(k,k_0)\|\,\|x(k_0)\| + \sum_{j=k_0}^{k-1} \|\Phi_A(k,j+1)\|\, b\, u_0 \tag{2.59}$$

$$|y(k)| \leq c\,\|\Phi_A(k,k_0)\|\,\|x(k_0)\| + c\sum_{j=k_0}^{k-1} \|\Phi_A(k,j+1)\|\, b\, u_0 + d\, u_0 \tag{2.60}$$

$$\|x(k)\| \leq \gamma\lambda^{k-k_0}\,\|x(k_0)\| + \sum_{j=k_0}^{k-1} \gamma\lambda^{k-(j+1)}\, b\, u_0 \tag{2.61}$$

$$|y(k)| \leq c\,\gamma\lambda^{k-k_0}\,\|x(k_0)\| + c\sum_{j=k_0}^{k-1} \gamma\lambda^{k-(j+1)}\, b\, u_0 + d\, u_0 \tag{2.62}$$

$$\sum_{j=k_0}^{k-1} \gamma\lambda^{k-(j+1)} \leq \gamma\lambda^{k-1}\,\frac{\lambda^{-k+1} - \lambda^{-k_0}}{1-\lambda} \tag{2.63}$$

$$\sum_{j=k_0}^{k-1} \gamma\lambda^{k-(j+1)} \leq \gamma\,\frac{1 - \lambda^{k-k_0-1}}{1-\lambda} \tag{2.64}$$

$$\sum_{j=k_0}^{k-1} \gamma\lambda^{k-(j+1)} \leq \frac{\gamma}{1-\lambda} \tag{2.65}$$

Assim, tem-se

$$\|x(k)\| \leq \gamma\,\lambda^{k-k_0}\,\|x(k_0)\| + \frac{\gamma}{1-\lambda}\, b\, u_0 \tag{2.66}$$

$$|y(k)| \leq c\,\gamma\,\lambda^{k-k_0}\,\|x(k_0)\| + (c\,\frac{\gamma}{1-\lambda}\, b + d)\, u_0 \tag{2.67}$$

como se queria demonstrar. Note-se ainda que, sendo $k \geq k_0$

$$
\begin{aligned}
\|x(k)\| &\leq \gamma \|x(k_0)\| + (\frac{\gamma}{1-\lambda} b)\, u_0 & (2.68)\\
|y(k)| &\leq c\gamma \|x(k_0)\| + (c\frac{\gamma}{1-\lambda} b + d)\, u_0 & (2.69)
\end{aligned}
$$

deste modo tanto o estado $x(k)$ como a saída $y(k)$ são limitados, como se queria demonstrar.

■

No caso particular em que $u(k) = 0$, de (2.66) e (2.67) tem-se

$$
\begin{aligned}
\|x(k)\| &\leq \gamma\lambda^{k-k_0} \|x(k_0)\| & (2.70)\\
|y(k)| &\leq c\gamma\lambda^{k-k_0} \|x(k_0)\| & (2.71)
\end{aligned}
$$

ou seja, $\|x(k)\|$ e $|y(k)|$ tendem exponencialmente para zero.

Como consequência obtêm-se os lemas seguintes.

Lema 2.3.2 *Para qualquer sistema linear comutado (2.47), em que* $\{A_{i(k)}, B_{i(k)}, C_{i(k)}, D_{i(k)}\}$ *têm norma limitada,* $|u(k)| \leq u_0$*, e em que as matrizes de transição* $\Phi_{A_i}(k, k_0)$ *associadas às matrizes da dinâmica* A_i *verificam*

$$\|\Phi_{A_i}(k, k_0)\| \leq \gamma_i \lambda_i^{k-k_0}$$

existe um tempo de permanência T_D *tal que (2.47) tem estado e saída limitados.*

Demonstração É imediato pela aplicação do teorema 2.2.4 e do lema 2.3.1.

■

Lema 2.3.3 *Para qualquer sistema linear comutado (2.47), em que* $\{A_{i(k)}, B_{i(k)}, C_{i(k)}, D_{i(k)}\}$ *têm norma limitada,* $|u(k)| \leq u_0$*, e em que as matrizes da dinâmica* A_i *têm valores próprios estrictamente estáveis, existe um tempo de permanência* T_D *tal que (2.47) tem estado e saída limitada.*

Demonstração É imediato pela aplicação do lema 2.2.3 e do lema anterior 2.3.2.

■

O lema seguinte refere-se a sistemas comutados exponencialmente estáveis com uma entrada que cai exponencialmente para zero.

Lema 2.3.4 *Seja o sistema linear uniformemente exponencialmente estável, descrito pela equação de estado*

$$x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)u(k) \tag{2.72}$$

com matriz de transição $\Phi_A(k, k_0)$ *e sinal de entrada* u

$$\|\Phi_A(k, k_0)\| \leq \gamma_1 \lambda_1^{(k-k_0)} \quad para \;\; k > k_0 \tag{2.73}$$

$$|u(k)| \leq \lambda_2^{(k-k_0)} u_0 \tag{2.74}$$

Então existem γ,γ' *e* λ *tal que o estado* x *verifica*

$$\|x(k)\| \leq \gamma_1 \lambda_1^{(k-k_0)} \|x(k_0)\| + \gamma \lambda^{(k-k_0)} u_0 \tag{2.75}$$

ou

$$\|x(k)\| \leq \lambda^{(k-k_0)} \gamma' \left[\|x(k_0)\| \;\; u_0 \right] \tag{2.76}$$

com

$$\lambda > max(\lambda_1, \lambda_2)$$

e em que γ,γ' *são função de* γ_1, γ_2, λ *e* $\|B(k)\|$.

A demonstração encontra-se no apêndice 2.B

2.4 Conclusões

Neste capítulo apresentam-se alguns lemas fundamentais para as demonstrações de estabilidade de sistemas de controlo comutados aplicados a sistemas lineares que são desenvolvidas nos capítulos seguintes. Em particular, na definição 2.1.1 generaliza-se o conceito de sistema linear comutado com tempo de permanência, de modo a incluir a situação em que cada subsistema (entre intervalos de comutação), possa ser um sistema variável no tempo e apresenta-se o teorema 2.2.4 que relaciona propriedades de estabilidade dos subsistemas com a estabilidade do sistema comutado com tempo de permanência. Estes constituem passos essenciais para as demonstração de estabilidade dos capítulos 4 e 5. Apresentam-se ainda alguns exemplos de simulação que motivam de forma intuitiva a aplicação do critério de *tempo de permanência* como forma de garantir a estabilidade em sistemas de controlo comutados.

Apêndices ao capítulo 2

2.A Demonstração do lema 2.2.3

Considerem-se dois casos: valores próprios distintos e valores próprios múltiplos.

Caso 1: valores próprios distintos

Sendo

$$\Phi_A(k, k_0) = A^{k-k_0} \tag{2.77}$$

dado que se admite serem distintos todos os valores próprios de A, existe uma transformação de semelhança T que diagonaliza A,

$$A^{(k-k_0)} = T^{-1} Diag(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)^{(k-k_0)} T \tag{2.78}$$

deste modo,

$$\|A^{(k-k_0)}\| \leq \|T^{-1}\| \, \|Diag(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)\|^{(k-k_0)} \|T\| \tag{2.79}$$

$$\|A^{(k-k_0)}\| \leq \|T^{-1}\| \, \|T\| \, |\max_i(\lambda_i)|^{(k-k_0)} \tag{2.80}$$

Com

$$\gamma = \|T^{-1}\| \, \|T\| \tag{2.81}$$

$$\lambda_M = |\max_i(\lambda_i)| \tag{2.82}$$

obtém-se

$$\|\Phi_A(k, k_0)\| \leq \gamma \lambda_M^{(k-k_0)} \tag{2.83}$$

O que conclui a demonstração para o caso 1.

Note-se que quando a norma induzida $\|.\|$ se refere à norma induzida pela norma euclidiana, $\|x\| = x^T x$, a norma induzida de uma matriz é dada pelo máximo valor singular da matriz,

$$\|A\| = \sigma_{max}(A) \tag{2.84}$$

Facilmente se mostra que para a matriz inversa se tem,

$$\|A^{-1}\| = \frac{1}{\sigma_{min}(A)} \tag{2.85}$$

Assim, γ pode ainda definir-se por

$$\gamma = \frac{\sigma_{max}(T)}{\sigma_{min}(T)}$$

Caso 2: valores próprios múltiplos

Quando se consideram valores próprios múltiplos a matriz A não pode ser diagonalizada por uma transformação de semelhança. No entanto, pode ser transformada numa matriz diagonal por blocos em que cada bloco é um *bloco de Jordan*, J_i.

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix} \tag{2.86}$$

Considere-se, sem perda de generalidade que A é constituída apenas por um bloco de Jordan, J. Assim, tem-se

$$A^{(k-k_0)} = T^{-1} J^{(k-k_0)} T \tag{2.87}$$

Note-se que uma matriz de Jordan se pode definir como,

$$J = \lambda I + N \tag{2.88}$$

em que N é uma matriz com todas as entradas nulas excepto a diagonal acima da diagonal principal, preenchida com '1's. Como N comuta com λI, pode aplicar-se a expansão binomial para exprimir a matriz J^k

$$J^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \lambda^{k-j} N^j \tag{2.89}$$

em que $\binom{k}{j}$ representa as combinações de k elementos tomados j a j.

Dado que N é nilpotente, $N^n = 0$ (n é a dimensão da matriz), então,

$$J^k = \sum_{j=0}^{n-1} \binom{k}{j} \lambda^{k-j} N^j \tag{2.90}$$

separando o termo λ^k,

$$J^k = \left\{ \sum_{j=0}^{n-1} \binom{k}{j} \lambda^{-j} N^j \right\} \lambda^k \tag{2.91}$$

Assumindo que $k > n > j$, as combinações de k, j a j, $\binom{k}{j}$, representam um termo polinomial em k com grau $j < n$. Assim, obtém-se

$$J^k = P_J(k) \lambda^k \tag{2.92}$$

em que $P_J(k)$ é um polinómio matricial de grau $n-1$,

$$\|J^k\| \leq \|P_J(k)\|\, |\lambda|^k \tag{2.93}$$

Uma vez que qualquer exponencial ε^k, com $\varepsilon > 1$, cresce mais rapidamente que um polinómio, $P_J(k)$, existe sempre uma constante $\gamma_J > 1$ tal que,

$$\|P_J(k)\| \leq \gamma_J\, \varepsilon^k \quad \text{para } k > 0 \tag{2.94}$$

de (2.93) e (2.94), tem-se

$$\|J^k\| \leq \gamma_J\, (\varepsilon|\lambda|)^k \tag{2.95}$$

assim, com $\lambda_M = \varepsilon|\lambda| > |\lambda|$, obtém-se

$$\|J^k\| \leq \gamma_J\, \lambda_M^k \tag{2.96}$$

e de (2.87)

$$\|A^{(k-k_0)}\| \leq \|T^{-1}\|\, \|T\|\, \gamma_J\, \lambda_M^{k-k_0} \tag{2.97}$$

com

$$\gamma = \|T^{-1}\|\, \|T\|\, \gamma_J \tag{2.98}$$

vem, finalmente

$$\|\Phi_A(k,k_0)\| \leq \gamma\, \lambda_M^{k-k_0} \tag{2.99}$$

O que conclui a demonstração para o caso 2. ■

2.B Demonstração do lema 2.3.4

Partindo da solução do sistema linear (2.72), que é dada por

$$x(k) \;=\; \Phi_A(k,k_0)\, x(k_0) + \sum_{j=k_0}^{k-1} \Phi_A(k,j+1)\, B(j)\, u(j) \tag{2.100}$$

de (2.73) e (2.74), tem-se que

$$\|x(k)\| \leq \gamma_1\, \lambda_1^{k-k_0}\, \|x(k_0)\| + \sum_{j=k_0}^{k-1} \lambda_1^{k-j-1}\, \beta\, u_0\, \lambda_2^{j-k_0} \tag{2.101}$$

em que β é um majorante de $\|B(k)\|$.

$$\|x(k)\| \leq \gamma_1\, \lambda_1^{k-k_0}\, \|x(k_0)\| + u_0\, \beta \sum_{j=k_0}^{k-1} \lambda_1^{k-j-1} \lambda_2^{j-k_0} \tag{2.102}$$

O somatório é a soma de uma progressão geométrica se $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Considerando $\lambda_1 < \lambda_2 < 1$

$$\sum_{j=k_0}^{k-1} \lambda_1^{k-j-1} \lambda_2^{j-k_0} = \frac{\lambda_2^{k-k_0-1} - \lambda_2^{-1} \lambda_1^{k-k_0}}{1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2}} \tag{2.103}$$

$$\sum_{j=k_0}^{k-1} \lambda_1^{k-j-1} \lambda_2^{j-k_0} = \lambda_2^{k-k_0-1} \frac{1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2}^{k-k_0}}{1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2}} \tag{2.104}$$

Como se mostra no apêndice 2.C, para $0 < \lambda < 1$,

$$1 - \lambda^k \leq (1 - \lambda)k \tag{2.105}$$

Assim, tem-se

$$\sum_{j=k_0}^{k-1} \lambda_1^{k-j-1} \lambda_2^{j-k_0} \leq \lambda_2^{k-k_0-1}(k - k_0) \tag{2.106}$$

Considerando o caso em que $\lambda_2 < \lambda_1 < 1$, facilmente se chega ao resultado dual,

$$\sum_{j=k_0}^{k-1} \lambda_1^{k-j-1} \lambda_2^{j-k_0} \leq \lambda_1^{k-k_0-1}(k - k_0) \tag{2.107}$$

Se $\lambda_1 = \lambda_2$ ambos menores que a unidade, então

$$\sum_{j=k_0}^{k-1} \lambda_1^{k-j-1} \lambda_1^{j-k_0} = \sum_{j=k_0}^{k-1} \lambda_1^{k-1-k_0} \tag{2.108}$$

$$\sum_{j=k_0}^{k-1} \lambda_1^{k-j-1} \lambda_1^{j-k_0} = \lambda_1^{k-1-k_0} \sum_{j=k_0}^{k-1} 1 \tag{2.109}$$

$$\sum_{j=k_0}^{k-1} \lambda_1^{k-j-1} \lambda_1^{j-k_0} = \lambda_1^{k-1-k_0}(k - k_0) \tag{2.110}$$

Assim, qualquer que seja a relação entre λ_1 e λ_2 tem-se

$$\sum_{j=k_0}^{k-1} \lambda_1^{k-j-1} \lambda_2^{j-k_0} \leq max(\lambda_1, \lambda_2)^{k-k_0-1} (k - k_0) \tag{2.111}$$

como e exponencial cresce mais rapidamente que um polinómio, para $\lambda > max(\lambda_1, \lambda_2)$ existe sempre um γ'' tal que

$$\sum_{j=k_0}^{k-1} \lambda_1^{k-j-1} \lambda_2^{j-k_0} \leq \gamma'' \lambda^{k-k_0-1} \tag{2.112}$$

substituindo em (2.102) tem-se

$$\|x(k)\| \leq \gamma_1 \, \lambda_1^{k-k_0} \, \|x(k_0)\| + u_0 \, \beta \, \gamma'' \, \lambda^{k-k_0-1} \tag{2.113}$$

donde, com $\gamma = \gamma''\beta$ se obtém,

$$\|x(k)\| \leq \gamma_1 \, \lambda_1^{k-k_0} \, \|x(k_0)\| + \gamma \, \lambda^{k-k_0-1} u_0 \tag{2.114}$$

Por outro lado, como $\lambda > max(\lambda_1, \lambda_2)$ e definindo

$$\gamma' = [\gamma_1 \;\; \gamma]$$

tem-se

$$\|x(k)\| \leq \lambda^{k-k_0} \, \gamma' \, [\|x(k_0)\| \;\; u_0]^T \tag{2.115}$$

como se queria demonstrar.

■

2.C Demonstração da desigualdade (2.105)

Segue-se a demonstração de

$$1 - \lambda^k \leq (1-\lambda)k \tag{2.116}$$

Por hipótese assuma-se que

$$\lambda^k - \lambda^{k+1} \leq (1-\lambda) \tag{2.117}$$

multiplicando à esquerda e à direita por λ, tem-se

$$\lambda^{k+1} - \lambda^{k+2} \leq (1-\lambda)\lambda \tag{2.118}$$

assumindo que $0 < \lambda < 1$

$$\lambda^{k+1} - \lambda^{k+2} \leq (1-\lambda) \tag{2.119}$$

donde a hipótese para k implica a hipótese para $k+1$. Para $k = 0$ tem-se que

$$\lambda^0 - \lambda^1 = 1 - \lambda \leq (1-\lambda) \tag{2.120}$$

ou seja a hipótese é verdadeira. Assim por indução, tem-se que para todos os $k \geq 0$

$$\lambda^k - \lambda^{k+1} \leq (1-\lambda) \tag{2.121}$$

Tome-se o lado esquerdo da desigualdade 2.116

$$1 - \lambda^k = (1-\lambda^1) + (\lambda^1 - \lambda^2) + ... + (\lambda^{k-1} - \lambda^k) = \sum_{j=1}^{k} \lambda^{j-1} - \lambda^j \tag{2.122}$$

substituindo (2.117) tem-se

$$1 - \lambda^k \leq \sum_{j=1}^{k} (1 - \lambda) \tag{2.123}$$

$$1 - \lambda^k \leq (1 - \lambda) \sum_{j=1}^{k} 1 \tag{2.124}$$

$$1 - \lambda^k \leq (1 - \lambda) k \tag{2.125}$$

como se queria demonstrar.

■

3. Controlo Comutado com Perturbações Acessíveis

Neste capítulo introduz-se um algoritmo de controlo comutado baseado em modelos múltiplos e analisa-se o algoritmo quanto à estabilidade quando aplicado a processos com perturbações acessíveis, admitindo que não existe erro de modelação do processo.

Este capítulo está organizado do seguinte modo. Na secção 3.1 faz-se uma introdução ao controlo comutado baseado em múltiplos modelos, enquadrando o problema e apresentando a estrutura do controlador e discutem-se as consequências da hipótese de modelação perfeita no erro de estimação do multi-estimador proposto. Nas secções 3.2 e 3.3 apresenta-se o modelo do processo com perturbações acessíveis e constrói-se o respectivo estimador de estado partilhado. Na secção 3.2 apresenta-se o multi-controlador de estado partilhado. Nas secções 3.5, 3.6 e 3.7 constrói-se o sistema composto estimador-controlador, o qual permite relacionar o estado composto $[\, x'_E \; x'_C \,]'$ com os erros de estimação e_i dos modelos considerados. Na secção 3.8 analisa-se o sistema composto quanto à detectabilidade através dos erros de estimação e_i. Este é um passo crucial na demonstração de estabilidade. Na secção 3.9 analisa-se o comportamento do sistema com o supervisor, são definidos os sinais de desempenho, o mecanismo de comutação e demonstra-se a estabilidade do sistema realimentado.

3.1 Introdução aos Controladores Comutados

Considere-se um processo, que admite um modelo linear P com entrada u, saída y e perturbação acessível d_a. Admita-se que o modelo do processo, P, pertence a um conjunto finito de modelos, previamente conhecido.

$$P \in \{P_1, P_2, P_3, ...\} = F_P \tag{3.1}$$

ou

$$F_P = \{P_i : i \in \mathcal{P}\} \tag{3.2}$$

onde $\mathcal{P}$ é o conjunto dos índices i associados a cada modelo da família F_P.

O problema que se pretende abordar é o da definição de um esquema de realimentação que estabilize e permita resolver o problema da regulação para o processo P, ou seja o seguimento de uma referência constante. Neste capítulo o processo admite-se constante, estendendo-se posteriormente os resultados para uma classe de processos lentamente variáveis no tempo.

Para cada modelo do processo P_i pertencente a F_P é projectado um controlador K_i que estabiliza o sistema controlado, representado na figura 3.1 onde se omitem as perturbações acessíveis e as componentes antecipativas para efeitos da dinâmica em cadeia fechada.

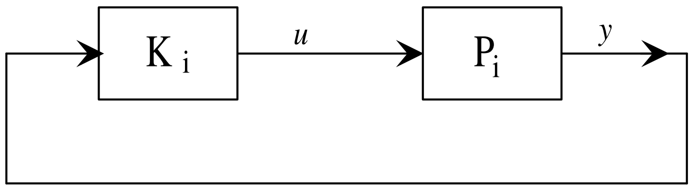

Fig. 3.1: Realimentação do modelo do processo P_i com o controlador K_i ignorando as perturbações acessíveis e as componentes antecipativas para efeitos da dinâmica em cadeia fechada.

Deste modo, é possível construir um $multi - controlador$ $K_{\sigma(k)}$. Esta estrutura de controlo é constituída por um banco de controladores em paralelo em que o sinal $\sigma(k)$ define qual o controlador activo em cada instante (fig. 3.2). O objectivo do controlo comutado é definir um sistema, doravante designado *supervisor*, que gere um sinal $\sigma(k)$ tal que o sistema em cadeia fechada, constituído pelo multi-controlador $K_{\sigma(k)}$ e pelo processo P, seja estável.

A missão do supervisor passa por:

- Inferir qual dos possíveis controladores K_i é (ou o mais) adequado ao processo.
- Garantir que a comutação entre controladores não induz instabilidade no sistema em cadeia fechada.

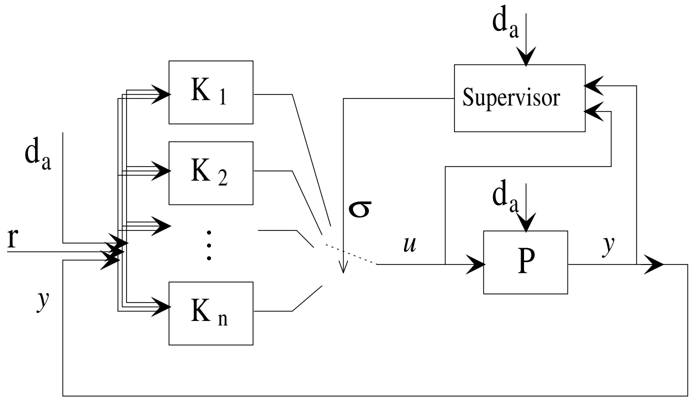

Fig. 3.2: Multi-controlador K_σ com supervisor.

Considere-se um supervisor (fig. 3.3) constituído por três blocos: um multi-estimador, E, que, estima a saída de cada um dos modelos admitidos para o processo P_i; um avaliador de desempenho, D, que compara os erros de estimação e_i de cada um dos modelos do multi-estimador; e um mecanismo de comutação S que gera o sinal $\sigma(k)$ garantindo a estabilidade do sistema evitando comutações (entre controladores) demasiado frequentes (*e.g.* impondo um tempo de permanência no multi-controlador).

O estimador e o avaliador de desempenho inferem qual o controlador mais adequado utilizando uma estratégia de equivalência certa. Ou seja, o modelo que mais se aproxima do processo (no sentido de "menor erro quadrático de estimação da saída") e determina o controlador a aplicar.

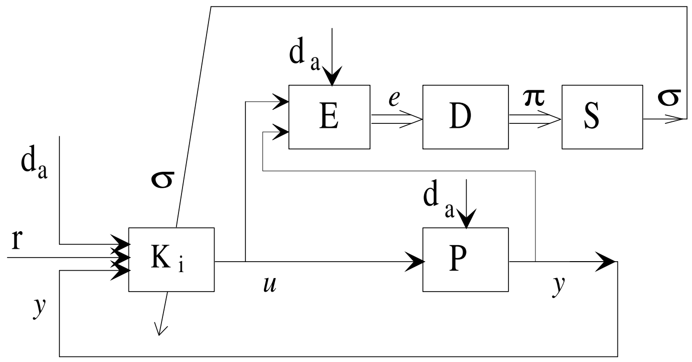

Fig. 3.3: Processo controlado com supervisão. Estimador E, avaliador de desempenho D e mecanismo de comutação S.

A consequência desta estratégia, comum no controlo adaptativo, é (desde que o processo P seja detectável) a detectabilidade do sistema $\{P, E, K_i\}$ através do erro de estimação e_i (ou seja tomando como saída e_i) [22]. A detectabilidade de um sistema, implica por definição que os modos não observáveis são estáveis. Deste modo, se a saída do sistema tende para zero, o estado também tende para zero. Torna-se assim intuitivo que a estratégia do supervisor, ao escolher um σ (ou seja um controlador K_σ) de modo a minimizar o erro de estimação e_σ, implica que o estado composto de $\{P, E, K_\sigma\}$ seja levado para origem. Repare-se que esta afirmação é não trivial requerendo demonstração, o que será efectuado posteriormente.

Neste capítulo admite-se a modelação perfeita do processo, no sentido em que a dinâmica do processo a controlar é uma dentro da classe dos modelos considerados.

No entanto, ao considerar a existência de dinâmica não modelada, para além da questão de assegurar a estabilidade em face da incerteza no conhecimento da dinâmica do processo [47, 48] surge a questão de, ao modelo mais próximo do processo (no sentido do menor erro de estimação), nem sempre corresponder o melhor controlador do processo de acordo com o critério usado no projecto dos controladores [50]. Esta questão é abordada em [51] com o método da referência virtual, no qual se faz a inferência do melhor controlador através de uma filtragem dos sinais de desempenho (mas sem fazer qualquer demonstração de estabilidade).

A abordagem baseada na referência virtual é no entanto diferente da considerada nesta tese, em que se pretende recorrer a métodos que sejam susceptíveis de análise com vista a demonstrar as suas propriedades de estabilidade e robustez.

3.1.1 O erro de estimação sob modelação perfeita

Seja P um processo estrictamente próprio, o qual admite um modelo linear com estado x_P, perturbação acessível d_a, entrada u e saída y, definido pelas equações de estado,

$$\begin{aligned} x_P(k+1) &= A_P x_P(k) + B_P u(k) + B'_P d_a(k) \\ y(k) &= C_P x_P(k) \end{aligned} \tag{3.3}$$

Considere-se a seguinte hipótese. Admita-se que a função de transferência da parte observável e controlável de u para y é dada por $\frac{B}{A}$, e a função de transferência de d_a para y dada por $\frac{D}{A}$, em que o polinómio A é mónico, A e B são polinómios co-primos com $\partial A > \partial B, \partial D$, (em que ∂X de signa o grau do polinómio X), com (3.3) estabilizável e detectável, ou seja com modos (caso existam) observáveis/não controláveis, controláveis/não observáveis, e não controláveis/não observáveis estáveis, os quais têm como valores próprios as raízes dos polinómios $\omega_{o\overline{c}}$, $\omega_{c\overline{o}}$, $\omega_{\overline{oc}}$, respectivamente.

Definição 3.1.1 *Defina-se um estimador E do processo P como um sistema linear de entradas u, d_a e y e saída $\hat{y}$, para o qual existem condições iniciais dos estados $x_E(k_0)$ e*

$x_P(k_0)$, *tal que*

$$\hat{y}(k) = y(k) \qquad para \quad k > k_0$$

A consequência desta definição e da hipótese referida atrás (sistema P estabilizável e detectável) é, como se verá mais à frente, que para quaisquer condições iniciais o erro de estimação tende exponencialmente para zero.

Considere-se o seguinte sistema linear como estimador do processo P, (fig. 3.4)

$$\hat{y} = \frac{A_0 - A\psi}{A_0} y + \frac{B\psi}{A_0} u + \frac{D\psi}{A_0} d_a \tag{3.4}$$

onde A_0 e ψ são polinómios mónicos com as raízes estrictamente dentro do círculo unitário, e a inclusão de ψ (com grau $\partial\psi = \partial A_0 - \partial A$) tem como objectivo garantir que o sistema definido por (3.4) é estrictamente causal. Assim, substituindo

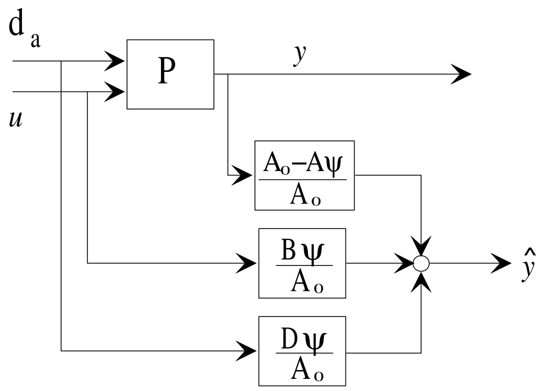

Fig. 3.4: Estimador para o processo P com entrada u e perturbação acessível d_a.

$$y = \frac{B}{A} u + \frac{D}{A} d_a \tag{3.5}$$

obtém-se

$$\hat{y} = \frac{A_0 - A\psi}{A_0} \left(\frac{B}{A} u + \frac{D}{A} d_a \right) + \frac{B\psi}{A_0} u + \frac{D\psi}{A_0} d_a \tag{3.6}$$

$$\hat{y} = \frac{A_0 B - A\psi B + B\psi A}{A A_0} u + \frac{A_0 D - A\psi D + D\psi A}{A A_0} d_a \tag{3.7}$$

$$\hat{y} = \frac{B A_0}{A A_0} u + \frac{D A_0}{A A_0} d_a \tag{3.8}$$

$$\hat{y} = \frac{B}{A} u + \frac{D}{A} d_a \tag{3.9}$$

Assim, à parte os transitórios que dependem das condições iniciais (e que tendem para zero como se verá à frente) tem-se $y = \hat{y}$.

Um tal estimador pode ser realizado sob a seguinte forma

$$x_E(k+1) = \begin{bmatrix} A_E & 0 & 0 \\ 0 & A_E & 0 \\ 0 & 0 & A_E \end{bmatrix} x_E(k) + \begin{bmatrix} b_E \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} y(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ b_E \\ 0 \end{bmatrix} u(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_E \end{bmatrix} d_a(k) \tag{3.10}$$

com a equação de saída

$$\hat{y}(k) = C\, x_E(k) \tag{3.11}$$

$$C = [b_0\, b_1 \dots b_{n+1} | 1\, a_1 \dots a_{n+1}] \tag{3.12}$$

Aqui, $A_0(z) = det(A_E - Iz)$ e b_E podem ser escolhidos arbitrariamente tal que A_0 seja estrictamente Hurwitz, o par $\{A_E, b_E\}$ seja controlável, e o grau $\partial A_0 \geq \partial A$. Note-se que sem a exigência do par $\{A_E, b_E\}$ ser controlável, seria possível construir uma realização do sistema com uma decomposição de Kalman que teria um subsistema não controlável, ou seja um sistema cujo estado não seria actualizado em função dos sinais de entrada. Exemplos usuais de A_E e b_E são

$$A_E = \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & \cdots & & 0 \\ -- & -- & -- & -- & -- \\ & & & & 0 \\ & I_n & & & \vdots \\ & & & & 0 \end{array}\right] \qquad b_E = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.13}$$

Esta escolha particular de A_E e b_E corresponde a construir um observador *deadbeat* com os pólos todos na origem. A escolha de outros valores para A_E e b_E poderá ser usada como um grau de liberdade adicional de forma a minimizar a sensibilidade face a perturbações e aumentar a robustez caso se considere a presença de dinâmica não modelada no processo.

Esta realização, na forma de estado partilhado, tem a vantagem de concentrar na equação de saída do estimador a dependência do modelo considerado, permitindo realizar um multi-estimador em que o estado é partilhado por todos os estimadores. Esta estrutura particular do estimador será explorada mais à frente.

Deste modo, definindo o erro de estimação como

$$e = y - \hat{y} \tag{3.14}$$

de (3.9) conclui-se que o estimador apresentado tem uma função de transferência nula das entradas u e d_a para e (fig. 3.5),

$$e = 0 \tag{3.15}$$

o que garante um erro de estimação nulo à parte os transitórios. Se as raízes do polinómio observador forem escolhidas todas na origem, os transitório extinguem-se ao fim de um número finito de intervalos de amostragem (menor ou igual à ordem do polinómio observador).

A função de transferência nula significa que todos os modos do sistema (de u e d_a para e), figura 3.5, são não observáveis, ou não controláveis (ou ambos).

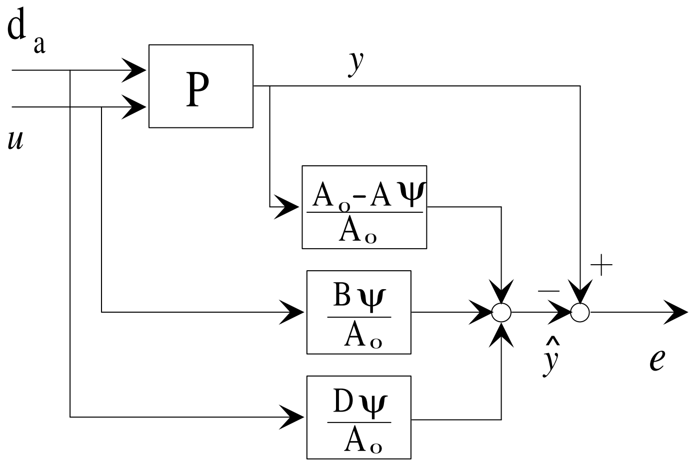

Fig. 3.5: Erro de estimação e em função da entrada u e da perturbação d_a.

Assim, considere-se o sistema com entrada u e saída e (que tem função de transferência nula). Dado que a função de transferência $\frac{B}{A}$ corresponde, por hipótese, à parte controlável e observável de u para y, então se $\frac{B}{A}$ é controlável através da entrada u, o polinómio A corresponde necessariamente a modos controláveis, e por consequência, são modos não observáveis do sistema definido de u para e.

Quanto aos modos do estimador, associados ao polinómio característico A_0, observa-se que existem modos (raízes de A_0) controláveis não observáveis, e modos não controláveis observáveis. No apêndice 3.C mostra-se como ocorrem estes modos não observáveis ou não controláveis devido à composição de sistemas em série e/ou em paralelo.

De forma análoga, considerando o sistema de d_a para e, obtém-se a mesma conclusão.

Além dos modos descritos poderão ainda existir modos não observáveis ou não controláveis no processo P.

Assim, os modos que se reflectem na saída e são modos do estimador associados a $A_0(z)$ e os modos observáveis não controláveis do processo $\omega_{o\bar{c}}$

Deste modo, através da decomposição de Kalman [26] do sistema obtém-se uma separação dos subsistemas quanto à sua observabilidade e controlabilidade (figura 3.6).

Os únicos modos que eventualmente serão observáveis são os modos associados às raízes do polinómio A_0 do estimador e os modos observáveis e não controláveis do processo P, associados às raízes de um polinómio $\omega_{o\bar{c}}$.

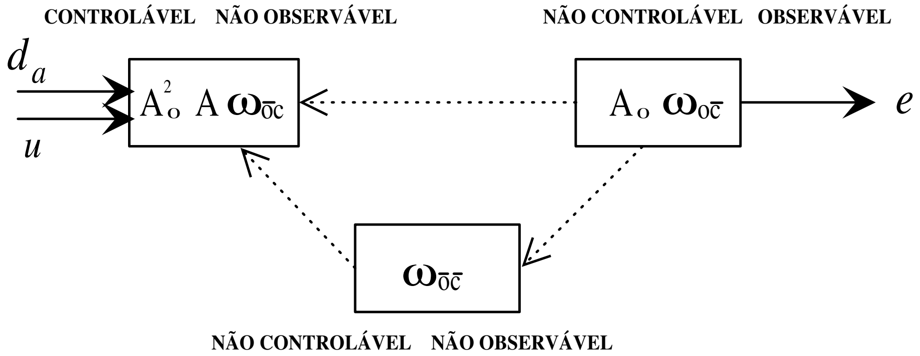

Fig. 3.6: Separação do sistema $[u, d_a] \rightarrow e$ em subsistemas de acordo com a controlabilidade e observabilidade.

Considere-se o sistema composto $\{P, E\}$ com saída e definido pelas matrizes $\{A, B, C, D\}$ e faça-se uma decomposição de Kalman pela matriz de transformação T_K. Obtém-se um sistema definido por

$$\left\{ \begin{bmatrix} A_{oc} & X_{21} & 0 & 0 \\ 0 & A_{o\bar{c}} & 0 & 0 \\ X_{13} & X_{23} & A_{\bar{o}c} & X_{43} \\ 0 & X_{24} & 0 & A_{\bar{o}\bar{c}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B_{oc} \\ 0 \\ B_{\bar{o}c} \\ 0 \end{bmatrix}, [\, C_{oc}\ C_{c\bar{o}}\ 0\ 0\,], [\, D\,] \right\} \tag{3.16}$$

Uma vez que não existe subsistema controlável e observável tem-se

$$\left\{ \begin{bmatrix} A_{o\bar{c}} & 0 & 0 \\ X_{23} & A_{\bar{o}c} & X_{43} \\ X_{24} & 0 & A_{\bar{o}\bar{c}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ B_{\bar{o}c} \\ 0 \end{bmatrix}, [\, C_{c\bar{o}}\ 0\ 0\,], [\, 0\,] \right\} \tag{3.17}$$

Separando o estado observável tem-se

$$x_{o\bar{c}}(k+1) = A_{o\bar{c}}\, x_{o\bar{c}}(k) \tag{3.18}$$

$$e(k) = C_{o\bar{c}} x_{o\bar{c}}(k) \tag{3.19}$$

e

$$\begin{bmatrix} x_{\bar{o}c}(k+1) \\ x_{\bar{o}\bar{c}}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{\bar{o}c} & X_{43} \\ 0 & A_{\bar{o}\bar{c}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{\bar{o}c}(k) \\ x_{\bar{o}\bar{c}}(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{\bar{o}c} & X_{23} \\ 0 & X_{24} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [u'(k)\, d_a'(k)]' \\ x_{o\bar{c}}(k) \end{bmatrix} \tag{3.20}$$

Ou seja o erro de estimação $e(k)$ é definido por um sistema homogéneo, não dependendo das entradas $u(k)$ e $d_a(k)$ mas apenas das condições iniciais $x_{o\bar{c}}(k)$.

Pela fórmula da variação das constantes $e(k)$ é dado por

$$e(k) = C_{o\bar{c}}\, A_{o\bar{c}}^{k-k_0}\, x_{o\bar{c}}(k_0) \tag{3.21}$$

Como

$$[\,C_{o\bar{c}}\ 0\ 0\,] = C\,T_K^{-1} \tag{3.22}$$

$$C_{o\bar{c}} = C\,T_K^{-1}\,[\,I\ 0\ 0\,]' \tag{3.23}$$

em que I é uma matriz identidade de dimensão igual à dimensão do vector de estado de um subsistema observável não controlável. Assim, de forma análoga

$$x_{o\bar{c}}(k_0) = [\,I\ 0\ 0\,]\,T_k x(k_0) \tag{3.24}$$

donde

$$e(k) = C\,T_K^{-1}\,[\,I\ 0\ 0\,]'\,A_{o\bar{c}}^{k-k_0}\,[\,I\ 0\ 0\,]\,T_k\,[x_E(k_0)\ x_P(k_0)]' \tag{3.25}$$

Aplicando normas, tem-se

$$|e(k)| \leq \|C\|\,\|T_K^{-1}\|\,\|[I\ 0\ 0]'\|\,\|A_{o\bar{c}}^{k-k_0}\|\,\|[I\quad 0\quad 0]\|\,\|T_K\|\,\|[x_E(k_0)\ x_P(k_0)]'\| \tag{3.26}$$

Como se viu atrás os únicos modos observáveis são os do estimador $A_0(z)$ e os modos observáveis não controláveis do processo $\omega_{o\bar{c}}(z)$. Como por hipótese, os modos não observáveis ou não controláveis do processo são estáveis, então $\omega_{o\bar{c}}$ tem raízes estáveis. Admita-se que todas as raízes dos modos não observáveis ou não controláveis estão estrictamente dentro do círculo de raio $\lambda_\omega < 1$. O polinómio A_0, sendo um parâmetro de projecto, é definido com raízes estáveis estrictamente dentro do círculo de raio $\lambda_E < 1$. Deste modo tem-se, pelo lema 2.2.3,

$$\|A_{o\bar{c}}^{k-k_0}\| \ \leq\ \gamma\,\lambda_{\omega E}^{k-k_0} \tag{3.27}$$

onde

$$1 > \lambda_{\omega E} > max\{\lambda_{\omega_{o\bar{c}}}, \lambda_E\} \tag{3.28}$$

substituindo obtém-se

$$|e(k)| \ \leq\ \|C\|\|T_K^{-1}\|\,\|T_K\|\,\gamma\,\lambda_{\omega E}^{k-k_0} \quad \left\|\begin{bmatrix} x_E(k_0) \\ x_P(k_0) \end{bmatrix}\right\| \tag{3.29}$$

A transformação T_K é função dos parâmetros do modelo do processo P, $\{A_P, B_P, C_P\}$ dos parâmetros do estimador E, e do polinómio ψ. Como por definição, T_K é não singular, e as entradas de C são majoradas, tem-se que $\|C\|$ e $\|T_K^{-1}\|$ são majoradas. Em conclusão, o erro de estimação cai exponencialmente para zero (com as raízes de A_0 e de $\omega_{o\bar{c}}$) e é majorado por uma envolvente cujo valor inicial é função do estado inicial $[x_E'(k_0)\ x_P'(k_0)]'$, do modelo do processo, e dos parâmetros do estimador. Ou seja, o erro de estimação é nulo à parte um transitório que decai exponencialmente para zero, como se havia afirmado anteriormente.

3.1.2 Supervisor baseado no multi-estimador de estado partilhado

O Supervisor considerado na secção anterior é constituído por três blocos: um multi-estimador, E, um avaliador de desempenho dos vários modelos preditivos, D, e um mecanismo de comutação, S.

O estimador com a estrutura proposta atrás, (3.10) e (3.11), estimador de estado partilhado, é uma realização não mínima que permite realizar um número arbitrário de estimadores em paralelo. Este facto deve-se a que a dependência dos parâmetros de cada modelo considerado está concentrada na equação de saída do modelo de estado do estimador, equação (3.11). O supervisor apresenta, assim, a estrutura da figura 3.7.

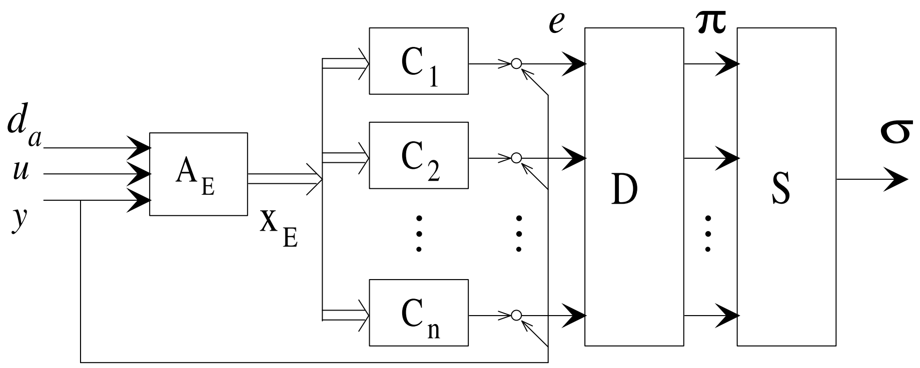

Fig. 3.7: Supervisor com estimador de estado partilhado

O bloco avaliador do desempenho dos estimadores (bloco D, fig.3.7) executa, em linha, uma estimação do desempenho. Considerando o erro de estimação, e, como medida de desempenho, o sinal de desempenho, π, vem dado por

$$\pi_i(k+1) = \lambda_\pi \pi_i(k) + e_i^2(k) \tag{3.30}$$

o que, à parte uma constante normalizadora, constitui uma estimação recursiva (com esquecimento λ_π) do erro quadrático médio de estimação, $\overline{e^2}$, para cada modelo admitido.

Admitindo outras medidas de desempenho é possível chegar a diferentes formas de cálculo dos sinais de desempenho [51, 52, 33].

Considerando o processo variável no tempo de acordo com um modelo de Markov conhecido *a priori*, os sinais de desempenho podem ser definidos como a probabilidade do processo corresponder a cada um dos modelos [33]. A equação para estes sinais de desempenho vem definida por,

$$P_r(k+1) = (M\,P_r(k)).\frac{Gauss(e^2)}{n(k)} \tag{3.31}$$

em que M é a matriz de transição que descreve um modelo de Markov que modela as transições entre sistemas, $P_r(k)$ é o vector das probabilidades de cada um dos modelos locais, $Gauss(e^2)$ é um vector com o erro de estimação de cada modelo aplicado à função distribuição de probabilidade admitida para os erros de estimação (*e.g.* gaussiana), $n(k)$ é um factor de normalização, e a operação "." designa o produto de dois vectores elemento a elemento.

Repare-se que a equação (3.31) é obtida fazendo hipóteses sobre o ruído de observação, que se admite Gaussiano. Como se verá posteriormente, neste caso e admitindo um processo invariante no tempo mas desconhecido, o critério (3.31) reduz-se a (3.30).

Uma outra forma de fazer a avaliação de desempenho dos modelos socorre-se do conceito de referência virtual [51]. Usando o conceito de referência virtual obtém-se uma medida da descrepância entre modelos, a qual pode ser calculada por uma filtragem dos erros de estimação. Esta medida torna-se especialmente útil na presença de dinâmica não modelada, e permite melhorar a inferência do melhor controlador quando o processo não corresponde a nenhum dos modelos nominais.

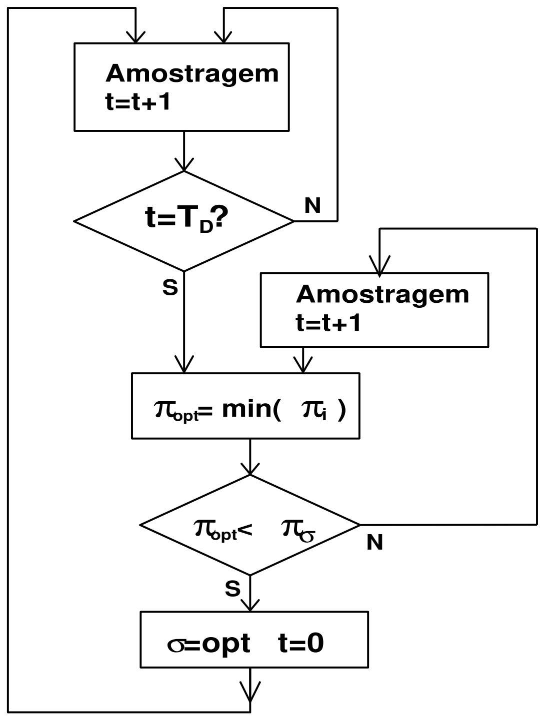

Fig. 3.8: Definição de mecanismo de comutação S, com imposição de tempo de permanência T_D.

O mecanismo de comutação consiste numa comparação entre os diversos sinais de desempenho, sendo o controlador que corresponde ao melhor deles aplicado ao sistema. Por forma a evitar a ocorrência de instabilidade devido a comutações demasiado frequentes, esta comutação efectua-se impondo um tempo de permanência, uma comutação cíclica, ou um mecanismo de histerese [22, 46, 57]. Neste trabalho usa-se um mecanismo de imposição de tempo de permanência que pode ser definido pelo diagrama da figura 3.8.

O mecanismo de comutação com imposição de tempo de permanência pode realizar-se com um contador t que é actualizado em todos os instantes de amostragem. Se o valor do contador for inferior ao tempo de permanência não é tomada mais nenhuma acção até nova actualização. Se for maior ou igual ao tempo de permanência, então compara-se o sinal de desempenho do modelo σ com o menor sinal de desempenho π, com índice *opt*. Se o menor sinal π_{opt}, tiver índice σ, actualiza-se o contador e faz-se nova comparação, caso contrário altera-se o índice σ, anula-se o contador t, e retoma-se a actualização do contador.

Este mecanismo de comutação significa que, uma vez um controlador aplicado ao processo, ele permanecerá aplicado pelo menos um tempo mínimo (designado por "tempo de permanência"), mesmo que o comparador de desempenho indique outro controlador.

3.2 Modelo do Processo com perturbações acessíveis

De modo a construir um controlador comutado para processos com perturbações acessíveis considere-se uma colecção finita de modelos M descrita pelo seguinte conjunto de equações às diferenças

$$(z-1)\,A_{p^*}(z)\,y(z) \;=\; z\,B_{p^*}(z)\,v(z) + (z-1)D_{ap^*}(z)\,d_a(z) + (z-1)D_{up^*}(z)\,d_u(z) \quad (3.32)$$

onde foi forçada a inclusão de um integrador de modo a garantir, com referência constante, um erro de seguimento nulo em regime estacionário, bem como uma transição suave entre controladores (figura 3.9).

Na equação (3.32), tem-se a seguinte identificação das variáveis

- $y(k)$ para a saída do processo.
- $v(k)$ para a entrada do integrador.
- $d_a(k)$ para as perturbações acessíveis.
- $d_u(k)$ para as perturbações inacessíveis.
- $u(k)$ para a variável manipulada, dada pela saída do integrador.

Os polinómios $A_{p^*}(z)$, $B_{p^*}(z)$, $D_{ap^*}(z)$, e $D_{up^*}(z)$ estão representados no operador avanço z, e admita-se sem perda de generalidade que

$$\partial A_{p^*}(z) = n$$

$$\partial B_{p^*}(z) < \partial A_{p^*}(z)$$

$$\partial D_{ap^*}(z) = n$$

$$\partial D_{up^*}(z) = n$$

em que ∂X designa o grau do polinómio X. Além disso, assume-se que $A_{p^*}(z)$ e cada um dos polinómios $B_{p^*}(z)$, $D_{ap^*}(z)$ e $D_{up^*}(z)$ não têm factores comuns instáveis. O índice p (ou q indiferentemente) designa cada uma das equações às diferenças associadas aos modelos, p^* designa o modelo que corresponde ao processo, e $\mathcal{P}$ é o conjunto de todos os índices p.

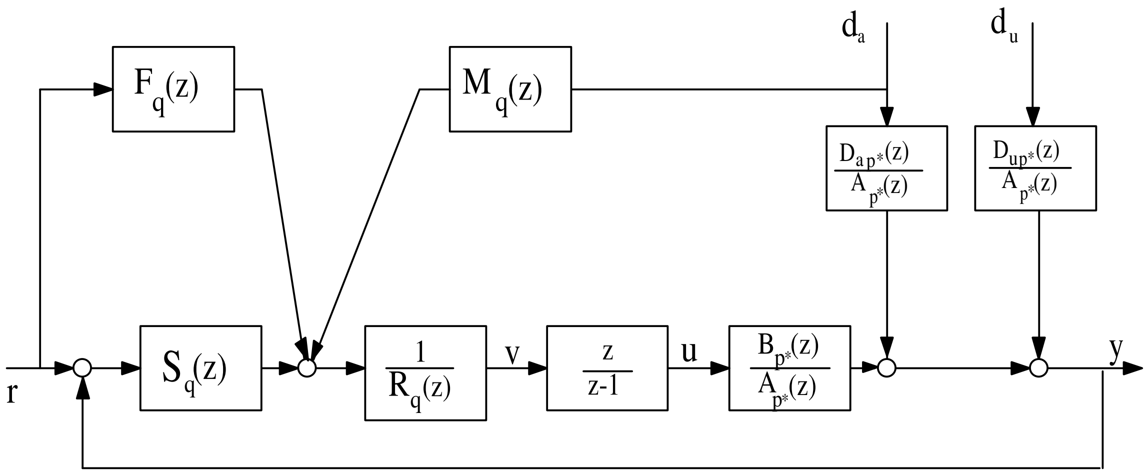

Fig. 3.9: Modelo do processo e estrutura do controlador com perturbações acessíveis.

Uma vez que o multi-estimador pressupõe uma estrutura do modelo igual para todos os processos, no caso de se pretender representar um processo de ordem inferior a n, ou seja $\partial A_{p^*}(z) \leq n$, substituam-se os polinómios $A_{p^*}(z)$, $B_{p^*}(z)$, e $D_{ap^*}(z)$ por $A_{p^*}(z)\psi(z)$, $B_{p^*}(z)\psi(z)$, e $D_{ap^*}(z)\psi(z)$, respectivamente. Aqui $\psi(z)$ é um polinómio com todos os valores próprios estáveis no círculo de raio λ_E, e

$$\partial A_{p^*}(z) + \partial\psi(x) = n \tag{3.33}$$

3.3 Estimador com realização de estado partilhado

Dividindo a equação do modelo do processo (3.32) pelo polinómio A_0, e somando e subtraindo $y(z)$, obtém-se

$$
\begin{aligned}
y(z) &= z^{-n-1}[A_0(z) - (z-1)A_{p^*}(z)]\frac{z^{n+1}}{A_0(z)}y(z) + z^{-n-1}(z)B_{p^*}(z)\frac{z^{n+1}}{A_0(z)}v(z) \\
&\quad + z^{-n-1}(z-1)D_{ap^*}(z)\frac{z^{n+1}}{A_0(z)}d_a(z) + z^{-n-1}(z-1)D_{up^*}(z)\frac{z^{n+1}}{A_0(z)}d_u(z)
\end{aligned} \tag{3.34}
$$

Sendo $A_0(z)$ o polinómio característico (de grau $n+1$) do estimador de estado partilhado. Note-se que uma realização de estado partilhado é uma realização não mínima de um sistema e, por este motivo, não é única. O estimador é escolhido de acordo com a seguinte hipótese:

Hipótese 3.3.1 *O polinómio $A_0(z)$, de grau $n+1$ é tal que todas as suas raízes estão estrictamente dentro do círculo de raio $\lambda_E < 1$*

$$A_0(z) = z^{n+1} + \omega_{E1}z^n + \ldots \omega_{En+1} \tag{3.35}$$

Deste modo, considere-se a seguinte proposição que define o estimador de estado partilhado.

Proposição 3.3.1 *Dado um modelo de um processo P_{p^*} definido por (3.32), e um polinómio A_0 de acordo com a Hipótese 3.3.1, é possível construir um estimador linear E_{p^*}, de acordo com a definição 3.1.1, tal que a dependência no índice p^*, se faça sentir apenas na equação da saída da representação em espaço de estados*

$$x_E(k+1) = \begin{bmatrix} A_E & 0 & 0 \\ 0 & A_E & 0 \\ 0 & 0 & A_E \end{bmatrix} x_E(k) + \begin{bmatrix} b_E \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} y(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ b_E \\ 0 \end{bmatrix} v(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_E \end{bmatrix} d_a(k) \tag{3.36}$$

$$y_p(k) = C_p\, x_E(k) \tag{3.37}$$

Demonstração

Definam-se as variáveis $y_{\omega e}$, $v_{\omega e}$ e $d_{a\omega e}$ com as quais se irão definir estados parciais do estimador

$$y_{\omega e}(k) \triangleq \frac{z^{n+1}}{A_0(z)}y(k) \tag{3.38}$$

$$v_{\omega e}(k) \triangleq \frac{z^{n+1}}{A_0(z)} v(k) \tag{3.39}$$

$$d_{a\omega e}(k) \triangleq \frac{z^{n+1}}{A_0(z)} d_a(k) \tag{3.40}$$

e considere-se a saída do sistema, que é um estimador para o $p - \acute{e}simo$ modelo, dada por

$$\begin{aligned} y_p(k) &= z^{-n-1}[A_0(z) - (z-1)A_p(z)]\frac{z^{n+1}}{A_0(z)} y(k) \\ &\quad + z^{-n-1}(z)B_p(z)\frac{z^{n+1}}{A_0(z)} v(k) \\ &\quad + z^{-n-1}(z-1)D_{ap}(z)\frac{z^{n+1}}{A_0(z)} d_a(k) \end{aligned} \tag{3.41}$$

onde o índice p pertence ao conjunto finito $\mathcal{P}$ e indica qual o modelo que está a ser considerado. O erro de estimação $e_p(k)$ é dado por

$$e_p = y_p(k) - y(k) \tag{3.42}$$

Assim, subtraindo (3.34) e (3.41) quando $p = p^*$

$$e_{p^*}(k) = \frac{(z-1)D_{ap^*}(z)}{A_0(z)} d_u(k) \tag{3.43}$$

Na ausência de perturbações d_u tem-se

$$e_{p^*}(z) = 0 \tag{3.44}$$

ou seja, tal como se indica na secção 3.1, à parte os transitórios que são função das condições iniciais e tendem para zero, o erro de estimação é nulo na ausência de perturbações não acessíveis. Construiu-se assim um estimador de (3.32) o qual, devido à inclusão de um integrador, gera um erro de estimação nulo, sob perturbações não acessíveis não nulas, desde que tendam para um valor constante. Com efeito, sendo

$$d_u(k) = \overline{d_u} \tag{3.45}$$

então

$$\lim_{t\to\infty} e_{p^*}(k) = \lim_{z\to 1} \left(\frac{(z-1)D_{ap^*}(z)}{A_0(z)} \right) \overline{d_u} \tag{3.46}$$

da Hipótese 3.3.1 as raízes de $A_0(z)$ estão estrictamente dentro do círculo unitário, donde $A_0(1) \neq 0$, e

$$\lim_{t\to\infty} e_{p^*}(k) = \lim_{z\to 1} \left(\frac{0 \times D_{ap^*}(1)}{A_0(1)} \right) \overline{d_u} = 0 \tag{3.47}$$

A envolvente de $e_{p^*}(k)$ tende para zero exponencialmente com as raízes de $A_0(z)$ e com os transitórios iniciais associados aos modos não controláveis. Note-se que as raízes de

$A_0(z)$ estão, por hipótese, todas dentro do círculo de raio λ_E e os modos não controláveis (ou não observáveis) estão no círculo de raio λ_ω.

Seja o vector de estado parcial

$$x_{Ey}(k) \triangleq \begin{bmatrix} y_{\omega e}(k-1) \\ y_{\omega e}(k-2) \\ \vdots \\ y_{\omega e}(k-n-1) \end{bmatrix} \tag{3.48}$$

De (3.35)e (3.38), observa-se que $x_{Ey}(k+1)$ verifica o modelo de estado

$$x_{Ey}(k+1) = A_E x_{Ey}(k) + b_E y(k) \tag{3.49}$$

com

$$A_E = \left[\begin{array}{cccc|c} \omega_{E1} & \omega_{E2} & \cdots & & \omega_{En} \\ \hline & & & & 0 \\ & I_n & & & \vdots \\ & & & & 0 \end{array}\right] \tag{3.50}$$

$$b_E = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.51}$$

de forma semelhante defina-se

$$x_{Ev}(k) \triangleq \begin{bmatrix} v_{\omega e}(k-1) \\ v_{\omega e}(k-2) \\ \vdots \\ v_{\omega e}(k-n-1) \end{bmatrix} \tag{3.52}$$

$$x_{Eda}(k) \triangleq \begin{bmatrix} d_{a\omega e}(k-1) \\ d_{a\omega e}(k-2) \\ \vdots \\ d_{a\omega e}(k-n-1) \end{bmatrix} \tag{3.53}$$

que verificam

$$x_{Ev}(k+1) = A_E\, x_{Ev}(k) + b_E\, v(k) \tag{3.54}$$

$$x_{Eda}(k+1) = A_E\, x_{Eda}(k) + b_E\, d_a(k) \tag{3.55}$$

O estado do estimador vem definido por

$$x_E(k) \triangleq \begin{bmatrix} x_{Ey}(k) \\ x_{Ev}(k) \\ x_{Eda}(k) \end{bmatrix} \tag{3.56}$$

o qual verifica a equação de estado

$$x_E(k+1) = \begin{bmatrix} A_E & 0 & 0 \\ 0 & A_E & 0 \\ 0 & 0 & A_E \end{bmatrix} x_E(k) + \begin{bmatrix} b_E \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} y(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ b_E \\ 0 \end{bmatrix} v(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_E \end{bmatrix} d_a(k) \tag{3.57}$$

A saída estimada, $y_p(k)$ assumindo o modelo p definido em (3.41), pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} y_p(k) \;&=\; z^{-n-1}[A_0(z) - (z-1)A_p(z)]y_{\omega e}(k) + z^{-n-1}(z)B_p(z)v_{\omega e}(k) \\ &\quad + z^{-n-1}(z-1)D_{ap}(z)d_{a\omega e}(k) \end{aligned} \tag{3.58}$$

Onde, como se definiu de (3.38) a (3.40), se tem

$$y_{\omega e}(k) \triangleq \frac{z^{n+1}}{A_0} y(k) \tag{3.59}$$

$$v_{\omega e}(k) \triangleq \frac{z^{n+1}}{A_0} v(k) \tag{3.60}$$

$$d_{a\omega e}(k) \triangleq \frac{z^{n+1}}{A_0} d_a(k) \tag{3.61}$$

Tomando em consideração a ordem dos polinómios $A_0(z)$, $A_p(z)$, $B_p(z)$ e $D_p(z)$

$$\partial B_p(z) = n$$

$$\partial D_p(z) = n$$

$$\partial A_p(z) = n$$

$$\partial A_0(z) = n+1$$

$$\partial[A_0(z) - (z-1)A_p(z)] = n$$

tem-se

$$z^{-n-1}(z)B_p(z) = b_0 + b_1 z^{-1} + ... + b_{n+1} z^{-(n+1)} \tag{3.62}$$

$$z^{-n-1}[A_0(z) - (z-1)A_p(z)] = 1 + a_1 z^{-1} + ... + a_{n+1} z^{-(n+1)} \tag{3.63}$$

$$z^{-n-1}(z-1)D_{ap}(z) = 1 + c_1 z^{-1} + ... + c_{n+1} z^{-(n+1)} \tag{3.64}$$

através da qual se pode definir o vector C_p da equação de saída do estimador.

$$y_p(k) = [b_0\, b_1 \ldots b_{n+1} | 1\, a_1 \ldots a_{n+1} | 1\, c_1 \ldots c_{n+1}] \begin{bmatrix} x_{Ey}(k) \\ x_{Ev}(k) \\ x_{Eda}(k) \end{bmatrix} \tag{3.65}$$

$$C_p = [b_0\, b_1 \ldots b_{n+1} | 1\, a_1 \ldots a_{n+1} | 1\, c_1 \ldots c_{n+1}] \tag{3.66}$$

$$y_p(k) = C_p\, x_E(k) \tag{3.67}$$

Note-se, que as equações (3.57) e (3.67) definem o estimador de estado partilhado numa forma na qual a dependência dos parâmetros do processo existe apenas na equação de saída (3.67), como se queria demonstrar.

■

De facto, é possível transformar qualquer realização em espaço de estados $\{A'_p, B'_p, C'_p\}$ numa realização com a forma $\{A_E, b_E, C_p\}$ se o par $\{A_E, b_E\}$ for controlável. Assim, pode construir-se sempre um estimador baseado em identificadores escolhendo um par $\{A_E, b_E\}$ controlável.

Em seguida, é derivada uma forma de (3.37), que será útil posteriormente. Seja,

$$\Phi_E(z) \triangleq (zI - A_E)^{-1} b_E \tag{3.68}$$

De (3.36) e (3.37):

$$y_p(z) = C_p \begin{bmatrix} \Phi_E(z) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} y(z) + C_p \begin{bmatrix} 0 \\ \Phi_E(z) \\ 0 \end{bmatrix} v(z) + C_p \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Phi_E(z) \end{bmatrix} d_a(z) \tag{3.69}$$

Note-se que

$$C_p \begin{bmatrix} \Phi_E(z) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.70}$$

pode também ser expresso por

$$C_p \left[zI - \begin{bmatrix} A_E & 0 & 0 \\ 0 & A_E & 0 \\ 0 & 0 & A_E \end{bmatrix} \right]^{-1} \begin{bmatrix} b_E \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.71}$$

Assim, introduzindo as variáveis auxiliares

$$A_{3E} = \begin{bmatrix} A_E & 0 & 0 \\ 0 & A_E & 0 \\ 0 & 0 & A_E \end{bmatrix} \tag{3.72}$$

$$y_p(z) = C_p(zI - A_{3E})^{-1} \begin{bmatrix} b_E \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} y(z) + C_p(zI - A_{3E})^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ b_E \\ 0 \end{bmatrix} v(z)$$

$$+ C_p(zI - A_{3E})^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_E \end{bmatrix} d_a(z) \tag{3.73}$$

Comparando com (3.41), obtém-se

$$C_p(zI - A_{3E})^{-1} \begin{bmatrix} b_E \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{A_0(z) - (z-1)A_p(z)}{A_0(z)}$$

o que é equivalente a

$$1 - C_p(zI - A_{3E})^{-1} \begin{bmatrix} b_E \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{(z-1)A_p(z)}{A_0(z)} \tag{3.74}$$

$$C_p(zI - A_{3E})^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ b_E \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{z\,B_p(z)}{A_0(z)} \tag{3.75}$$

$$C_p(zI - A_{3E})^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_E \end{bmatrix} = \frac{(z-1)\,D_{ap}(z)}{A_0(z)} \tag{3.76}$$

Por outro lado, fazendo uma partição de C_p como

$$C_p = [C_{py} \;\; C_{pv} \;\; C_{pd_a}] \tag{3.77}$$

obtém-se

$$y_p(z) = C_{py}\Phi_E(z)y(z) + C_{pv}\Phi_E(z)v(z) + C_{pd_a}\Phi_E(z)d_a(z) \tag{3.78}$$

O que é uma forma equivalente de(3.73).

3.4 Controlador com realização de estado partilhado

Nesta secção procede-se de uma forma análoga à secção anterior, de forma a obter-se um controlador de estado partilhado.

Considere-se um conjunto de controladores, onde o $q - ésimo$ controlador é dado por

$$R_q(z)v(k) = S_q(z)e_T(k) + F_q(z)r(k) + M_q(z)d_a(k) \tag{3.79}$$

em que $r(k)$ é a referência a ser seguida e $e_T(k)$ é o erro de seguimento definido por

$$e_T(k) \triangleq r(k) - y(k) \tag{3.80}$$

Os polinómios $F_q(z)$ e $M_q(z)$ correspondem ao efeito antecipativo da perturbação acessível e da referência, respectivamente, e satisfazem a seguinte hipótese.

Hipótese 3.4.1 *Os polinómios $F_q(z)$ e $M_q(z)$ satisfazem ("zero off-set property")*

$$F_q(1) = 0 \tag{3.81}$$

$$M_q(1) = 0 \tag{3.82}$$

Esta propriedade garante, com referência r e perturbação acessível d_a constantes, que quando $e_T = 0$, a variável manipulada u é constante.

Admite-se ainda que:

Hipótese 3.4.2 *Os polinómios $R_p(z)$ e $S_p(z)$ são escolhidos de modo que o sistema em cadeia fechada constituído pelo $p-$ésimo modelo com o $p-$ésimo controlador tem todos os valores próprios dentro do círculo de raio λ_{CL}.*

Facilmente se observa, de (3.32) e (3.79), que os valores próprios do sistema em cadeia fechada são as raízes do polinómio

$$(z-1)\, A_p(z) R_p(z) + z\, B_p(z) S_p(z) \tag{3.83}$$

De forma a obter-se uma realização com estado partilhado, divida-se (3.79) pelo polinómio $\omega_C(z)$, some-se e subtraia-se $u(k)$ de (3.79), de modo a obter-se o seguinte modelo equivalente

$$\begin{aligned} v(k) = z^{-n}[\omega_C(z) - R_q(z)].\frac{z^n}{\omega_C(z)} v(k) + z^{-n} S(z) \frac{z^n}{\omega_C(z)} e_T(k) + \\ + z^{-n} F(z) \frac{z^n}{\omega_C(z)} r(k) + z^{-n} M(z) \frac{z^n}{\omega_C(z)} d_a(k) \end{aligned} \tag{3.84}$$

em que $\omega_C(z)$ designa o polinómio

$$\omega_C(z) = z^n + \omega_{C1} z^{n-1} + \ldots + \omega_{Cn} \tag{3.85}$$

e verifica a seguinte hipótese:

Hipótese 3.4.3 *O polinómio $\omega_C(z)$ é tal que todas as suas raízes estão estrictamente dentro do círculo de raio $\lambda_C < 1$*

Assim, considere-se a seguinte proposição que define o controlador de estado partilhado.

Proposição 3.4.1 *Dado um controlador K_q definido por (3.79), que satisfaz as Hipóteses 3.4.1 e 3.4.2, e um polinómio $\omega_C(z)$ de acordo com a Hipótese 3.4.3, é possível construir um controlador linear K_i, tal que a dependência no índice i, se faça sentir apenas na equação da saída da representação em espaço de estados*

$$x_C(k+1) = \begin{bmatrix} A_C & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_C \end{bmatrix} x_C(k) + \begin{bmatrix} b_C \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} v(k) +$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 \\ b_C \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e_T(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_C \\ 0 \end{bmatrix} r(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ b_C \end{bmatrix} d_a(k) \tag{3.86}$$

$$v_q(k) = f_q x_C(k) + g_{eq} e_T(k) + g_{rq} r(k) + g_{daq} d_a(k) \tag{3.87}$$

onde

$$f_q = [0\; f_{eq}\; f_{rq}\; f_{daq}] \tag{3.88}$$

Demonstração Definam-se as variáveis $v_{\omega c}$, $e_{T\omega c}$, $r_{\omega c}$, e $d_{a\omega c}$ com as quais se irão definir estados parciais

$$v_{\omega c}(k) \triangleq \frac{z^{-n}}{\omega_C(z)} v(k) \tag{3.89}$$

$$e_{T\omega c}(k) \triangleq \frac{z^{-n}}{\omega_C(z)} e_T(k) \tag{3.90}$$

$$r_{\omega c}(k) \triangleq \frac{z^{-n}}{\omega_C(z)} r(k) \tag{3.91}$$

$$d_{a\omega c}(k) \triangleq \frac{z^{-n}}{\omega_C(z)} d_a(k) \tag{3.92}$$

Seja

$$x_{cv}(k) = \begin{bmatrix} v_{wc}(k-1) \\ v_{wc}(k-2) \\ \vdots \\ v_{wc}(k-n) \end{bmatrix} \tag{3.93}$$

De (3.85) e (3.89), observa-se que $x_{cv}(k)$ verifica o seguinte modelo de estado

$$x_{cv}(k+1) = A_C\, x_{cv}(k) + b_C\, v(k) \tag{3.94}$$

com

$$A_C \triangleq \left[\begin{array}{cccc|c} \omega_{C1} & \omega_{C2} & \dots & & \omega_{Cn} \\ -- & -- & -- & -- & -- \\ & & & & 0 \\ & I_n & & & \vdots \\ & & & & 0 \end{array} \right] \tag{3.95}$$

$$b_C \triangleq \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.96}$$

Assim, definam-se os estados parciais

$$x_{ce}(k) = \begin{bmatrix} e_{Twc}(k-1) \\ e_{Twc}(k-2) \\ \vdots \\ e_{Twc}(k-n) \end{bmatrix} \tag{3.97}$$

$$x_{cr}(k) = \begin{bmatrix} r_{wc}(k-1) \\ r_{wc}(k-2) \\ \vdots \\ r_{wc}(k-n) \end{bmatrix} \tag{3.98}$$

$$x_{cda}(k) = \begin{bmatrix} d_{awc}(k-1) \\ d_{awc}(k-2) \\ \vdots \\ d_{awc}(k-n) \end{bmatrix} \tag{3.99}$$

e

$$x_{ce}(k) = A_C\, x_{ce}(k) + b_C\, e_T(k) \tag{3.100}$$

$$x_{cr}(k) = A_C\, x_{cr}(k) + b_C\, r(k) \tag{3.101}$$

$$x_{cda}(k) = A_C\, x_{cda}(k) + b_C\, d_a(k) \tag{3.102}$$

O estado do controlador é definido por

$$x_C(k) \triangleq \begin{bmatrix} x_{cv}(k) \\ x_{ce}(k) \\ x_{cr}(k) \\ x_{cda}(k) \end{bmatrix} \tag{3.103}$$

Deste modo, tem-se

$$x_C(k+1) = \begin{bmatrix} A_C & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_C \end{bmatrix} x_C(k) + \begin{bmatrix} b_C \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} v(k) +$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 \\ b_C \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e_T(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_C \\ 0 \end{bmatrix} r(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ b_C \end{bmatrix} d_a(k) \tag{3.104}$$

Da equação (3.84), por um argumento idêntico ao utilizado para se obter a equação (3.37), o sinal de controlo dado pelo $q - \acute{e}simo$ controlador é dado por

$$v_q(k) = f_q x_C(k) + g_{eq} e_T(k) + g_{rq} r(k) + g_{daq} d_a(k) \tag{3.105}$$

onde

$$f_q = [0\, f_{eq}\, f_{rq}\, f_{daq}] \tag{3.106}$$

como se queria demonstrar

■

Em seguida, é derivada uma forma de (3.87), que será útil posteriormente. Seja,

$$\Phi_C(z) \stackrel{\triangle}{=} (z - A_C)^{-1} b_C \tag{3.107}$$

$$v_q(z) = f_q \begin{bmatrix} \Phi_C(z) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} v(z) + (f_q \begin{bmatrix} 0 \\ \Phi_C(z) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + g_{eq}) e_T(z)$$
$$+ (f_q \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Phi_C(z) \\ 0 \end{bmatrix} + g_{rq}) r(z) + (f_q \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \Phi_C(z) \end{bmatrix} + g_{daq}) d_a(z) \tag{3.108}$$

Assim, para simplificar a representação, defina-se

$$A_{4C} = \begin{bmatrix} A_C & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_C \end{bmatrix} \tag{3.109}$$

tem-se

$$y_p(z) = f_q(zI - A_{4C})^{-1} \begin{bmatrix} b_C \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} v(z) + (f_q(zI - A_{4C})^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ b_C \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + g_{eq}) e_T(z)$$
$$+ (f_q(zI - A_{4C})^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_C \\ 0 \end{bmatrix} + g_{rq}) r(z) (f_q(zI - A_{4C})^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ b_C \end{bmatrix} + g_{daq}) d_a(z) \tag{3.110}$$

$$f_q(zI - A_{4C})^{-1} \begin{bmatrix} b_C \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{\omega_C(z)-R_p(z)}{\omega_C(z)} \tag{3.111}$$

$$g_{eq} + f_q(zI - A_{4C})^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ b_C \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{S_p(z)}{\omega_C(z)} \tag{3.112}$$

$$g_{rq} + f_q(zI - A_{4C})^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_C \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{F_p(z)}{\omega_C(z)} \tag{3.113}$$

$$g_{daq} + f_q(zI - A_{4C})^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ b_C \end{bmatrix} = \frac{M_p(z)}{\omega_C(z)} \tag{3.114}$$

de (3.107) e (3.88) obtém-se, finalmente,

$$\begin{aligned} v_q(k) &= f_{vq}\Phi_C(z)v(k) + (f_{eq}\Phi_C(z) + g_{eq})e_T(k) \\ &+(f_{rq}\Phi_C(z) + g_{rq})r(k) + (f_{daq}\Phi_C(z) + g_{daq})d_a(k) \end{aligned} \tag{3.115}$$

que permite relacionar as polinómios do controlador em (3.111-3.114) com os parâmetros do modelo de estado.

3.5 Estimador com estado modificado

Seja a equação (3.36) com $y(k)$ expresso em termos da referência r e do erro de seguimento e_T.

$$x_E(k+1) = \begin{bmatrix} A_E & 0 & 0 \\ 0 & A_E & 0 \\ 0 & 0 & A_E \end{bmatrix} x_E(k) + \begin{bmatrix} b_E \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} (r(k) - e_T(k)) + \tag{3.116}$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 \\ b_E \\ 0 \end{bmatrix} v(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_E \end{bmatrix} d_a(k) \tag{3.117}$$

Considerando a referência r e a perturbação acessível d_a constantes, pode definir-se um sistema linear equivalente en torno do estado de equilíbrio. O estado de equilíbrio x_{Eq} de

(3.117) para uma referência r e uma perturbação acessível d_a verifica

$$x_{Eeq} = \begin{bmatrix} A_E & 0 & 0 \\ 0 & A_E & 0 \\ 0 & 0 & A_E \end{bmatrix} x_{Eeq} + \begin{bmatrix} b_E \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} (r - e_T(\infty)) + \begin{bmatrix} 0 \\ b_E \\ 0 \end{bmatrix} v(\infty) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_E \end{bmatrix} d_a \tag{3.118}$$

sendo dado por (dado $e_T(\infty) = 0$, $v(\infty) = 0$):

$$x_{Eeq} = \left(I - \begin{bmatrix} A_E & 0 & 0 \\ 0 & A_E & 0 \\ 0 & 0 & A_E \end{bmatrix} \right)^{-1} \left(\begin{bmatrix} b_E \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} r + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_E \end{bmatrix} d_a \right) \tag{3.119}$$

$$x_{Eeq} = (I - A_E)^{-1} \begin{bmatrix} b_E \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} r + (I - A_E)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_E \end{bmatrix} d_a \tag{3.120}$$

O estado modificado do estimador é definido por

$$\overline{x}_E(k) \triangleq x_E(k) - x_{Eeq} \tag{3.121}$$

Por forma a obter-se uma equação para o estado de equilíbrio $\overline{x}_E(k)$, subtraia-se (3.117) de (3.118), resultando,

$$\overline{x}_E(k+1) = \begin{bmatrix} A_E & 0 & 0 \\ 0 & A_E & 0 \\ 0 & 0 & A_E \end{bmatrix} \overline{x}_E(k) - \begin{bmatrix} b_E \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e_T(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ b_E \\ 0 \end{bmatrix} v(k) \tag{3.122}$$

De modo a deduzir a equação de saída para o estado modificado, note-se que, de (3.37) e da definição do estado modificado (3.121) se obtém,

$$y_p(k) = C_p(\overline{x}_E(k) + x_{Eqe}) \tag{3.123}$$

$$y_p(k) = C_p(I - A_E)^{-1} \begin{bmatrix} b_E \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} r + C_p(I - A_E)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_E \end{bmatrix} d_a + C_p\overline{x}_E(k) \tag{3.124}$$

e que comparando com (3.74-3.76), em que $z = 1$, vem

$$C_p(I - A_{3E})^{-1} \begin{bmatrix} b_E \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 1 - \frac{(1-1)A_p(1)}{A_0(1)} = 1 \tag{3.125}$$

$$C_p(I - A_{3E})^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ b_E \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1\, B_p(1)}{A_0(1)} = 1 \tag{3.126}$$

$$C_p(I - A_{3E})^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_E \end{bmatrix} = \frac{(1-1)\, D_{ap}(1)}{A_0(1)} = 0 \tag{3.127}$$

Usando (3.125) e (3.127) em (3.124)

$$y_p(k) = C_p\overline{x}_E(k) + r \tag{3.128}$$

e subtraindo $y(k)$ de ambos os lados da equação (3.128), tem-se

$$e_p(k) = C_p\overline{x}_E(k) + e_T(k) \tag{3.129}$$

onde

$$e_p(k) \triangleq y_p(k) - y(k) \tag{3.130}$$

designa o erro de estimação da saída. A equação (3.129) é válida para qualquer índice $p \in \mathcal{P}$.

3.6 Controlador com estado modificado

De forma semelhante, seja x_{Ceq} o estado de equilíbrio do controlador com uma referência constante r a perturbação acessível d_a. De (3.86), e dado que $v(\infty) = 0$ e $e_T(\infty) = 0$, tem-se

$$x_{Ceq} = \begin{bmatrix} A_C & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_C \end{bmatrix} x_{Ceq} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_C \\ 0 \end{bmatrix} r + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ b_C \end{bmatrix} d_a \tag{3.131}$$

Subtraindo (3.131) de (3.86) e definindo o estado modificado do controlador por

$$\overline{x}_C \triangleq x_C(k) - x_{Ceq} \tag{3.132}$$

tem-se a seguinte dinâmica para o estado modificado do controlador

$$\overline{x}_C(k+1) = \begin{bmatrix} A_C & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_C \end{bmatrix} \overline{x}_C(k) + \begin{bmatrix} b_C \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} v(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ b_C \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e_T(k) \tag{3.133}$$

De modo a obter-se a equação de saída do controlador, note-se que x_{Ceq} verifica

$$x_{Ceq} = \left(I - \begin{bmatrix} A_C & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_C \end{bmatrix} \right)^{-1} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_C \\ 0 \end{bmatrix} r + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ b_C \end{bmatrix} d_a \right) \tag{3.134}$$

ou

$$x_{Ceq} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Phi_C(1)r \\ \Phi_C(1)d_a \end{bmatrix} \tag{3.135}$$

De (3.87)

$$v_q(k) = f_q(\overline{x}_C(k) + x_{Ceq}) + g_{eq}e_T(k) + g_{rq}r(k) + g_{daq}d_a(k) \tag{3.136}$$

ou

$$v_q(k) = f_q\overline{x}_C(k) + (f_{rq}\Phi_C(1) + g_{rq})r(k) + (f_{daq}\Phi_C(1) + g_{daq})d_a(k) + g_{eq}e_T(k) \tag{3.137}$$

Pela Hipótese 3.4.1 (*zero off-set property*), as dinâmicas $r \to v$ e $d_a \to v$ têm ganho estático nulo, pelo que se obtém,

$$f_{rq}\Phi_C(1) + g_{rq} = 0 \tag{3.138}$$

$$f_{daq}\Phi_C(1) + g_{daq} = 0 \tag{3.139}$$

assim, de (3.137) vem

$$v_q(k) = f_q\overline{x}_C(k) + g_{eq}e_T(k) \tag{3.140}$$

3.7 Estado composto

A equação (3.129) verifica-se em particular para $p = l$,

$$e_T(k) = e_l(k) - C_l\overline{x}_E(k) \tag{3.141}$$

Substituindo (3.141) em (3.129) e eliminando $e_T(k)$

$$e_p(k) = (C_p - C_l)\,\overline{x}_E(k) + e_l(k) \tag{3.142}$$

Substituindo (3.141) no modelo de estado (3.122)

$$\overline{x}_E(k+1) = \begin{bmatrix} A_E & 0 & 0 \\ 0 & A_E & 0 \\ 0 & 0 & A_E \end{bmatrix} \overline{x}_E(k) - \begin{bmatrix} b_E \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} (e_l(k) - C_l\overline{x}_E(k)) + \begin{bmatrix} 0 \\ b_E \\ 0 \end{bmatrix} v(k) \tag{3.143}$$

O mesmo procedimento é efectuado com a realização em estado partilhado do controlador. Substituindo (3.141) em (3.133)

$$\overline{x}_C(k+1) = \begin{bmatrix} A_C & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_C \end{bmatrix} \overline{x}_C(k) + \begin{bmatrix} b_C \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} v(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ b_C \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} (e_l(k) - C_l\overline{x}_E(k)) \tag{3.144}$$

Substituindo (3.141) em (3.140)

$$v_q(k) = f_q\overline{x}_C(k) + g_{eq}(e_l(k) - C_l\overline{x}_E(k)) \tag{3.145}$$

O modelo composto pela combinação dos modelos de estado do estimador e do controlador, vem dado por

$$\begin{bmatrix} \overline{x}_E(k+1) \\ ----- \\ \overline{x}_C(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_E & 0 & 0 & & & & \\ 0 & A_E & 0 & & & \underline{0} & \\ 0 & 0 & A_E & & & & \\ & & & A_C & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & A_C & 0 & 0 \\ & \underline{0} & & 0 & 0 & A_C & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 & A_C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{x}_E(k) \\ ----- \\ \overline{x}_C(k) \end{bmatrix} -$$

$$- \begin{bmatrix} -b_E \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ b_C \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_l & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{x}_E(k) \\ ----- \\ \overline{x}_C(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b_E \\ 0 \\ b_C \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} v(k) + \begin{bmatrix} -b_E \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ b_C \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e_l(k) \tag{3.146}$$

Com as equações da saída

$$v_q(k) = \begin{bmatrix} -g_{eq}C_l & | & f_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{x}_E(k) \\ \overline{x}_C(k) \end{bmatrix} + g_{eq}\, e_l(k) \tag{3.147}$$

e, de (3.142)

$$e_l(k) = \begin{bmatrix} C_p - C_l & | & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{x}_E(k) \\ \overline{x}_C(k) \end{bmatrix} + e_l(k) \tag{3.148}$$

Defina-se

$$d = \begin{bmatrix} -b_E \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ b_C \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.149}$$

$$b = \begin{bmatrix} 0 \\ b_E \\ 0 \\ b_C \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.150}$$

$$A_l = \begin{bmatrix} A_E & 0 & 0 & & & & \\ 0 & A_E & 0 & & \underline{0} & & \\ 0 & 0 & A_E & & & & \\ & & & A_C & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & A_C & 0 & 0 \\ & \underline{0} & & 0 & 0 & A_C & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 & A_C \end{bmatrix} - d \begin{bmatrix} C_l & 0 \end{bmatrix} \tag{3.151}$$

$$C_{pl} \triangleq \begin{bmatrix} C_p - C_l & | & 0 \end{bmatrix} \tag{3.152}$$

$$f_{ql} \triangleq \begin{bmatrix} -g_{eq} C_l & | & f_q \end{bmatrix} \tag{3.153}$$

e o estado composto x, obtido pela concatenação dos estados modificados do estimador e do controlador

$$x(k) \triangleq \begin{bmatrix} \overline{x}_E(k+1) \\ ---- \\ \overline{x}_C(k+1) \end{bmatrix} \tag{3.154}$$

Com as definições acima apresentadas o modelo composto é dado por

$$x(k+1) = A_l\, x(k) + b\, v(k) + d\, e_l(k) \tag{3.155}$$

$$v_q(k) = f_{ql}\, x(k) + g_{eq}\, e_l(k) \tag{3.156}$$

$$e_p(k) = C_{pl}\, x(k) + e_l(k) \tag{3.157}$$

Uma vez que o controlador activo no instante k é o $q-\acute{e}simo$ controlador, tem-se

$$v(k) = v_q(k) \tag{3.158}$$

Substituindo (3.156) em (3.155), tem-se

$$x(k+1) = (A_l + b f_{ql}) x(k) + (d + b g_{eq}) e_l(k) \tag{3.159}$$

Assim, este resultado pode ser resumido na seguinte proposição:

Proposição 3.7.1 *Dado um estimador E_p e um controlador K_q na forma de estado partilhado, de acordo com as proposições 3.3.1 e 3.4.1, a interconexão $\{K_q, E_p, P_{p^*}\}$ e considerando a referência r, e a perturbação acessível d_a constantes, é possível representar o sistema composto $\{K_q, E_p\}$ em torno do ponto de equilíbrio, na seguinte forma*

$$x(k+1) = (A_l + b f_{ql}) x(k) + (d + b g_{eq}) e_l(k) \tag{3.160}$$

$$e_p(k) = C_{pl} x(k) + e_l(k) \tag{3.161}$$

$$v_q(k) = f_{ql} x(k) + g_{eq} e_l(k) \tag{3.162}$$

$$e_T(k) = \begin{bmatrix} -C_l & 0 \end{bmatrix} x(k) + e_l(k) \tag{3.163}$$

em que a entrada e_l representa o l*-ésimo erro de estimação, e os parâmetros A_l, b, f_{ql}, C_{pl}, d, são definidos por (3.151), (3.150), (3.153), (3.152) e (3.149), respectivamente.*

■

As equações acima exprimem o estado composto $[x'_E(k)\, x'_C(k)]'$ em torno do ponto de equilíbrio, a saída do controlador activo $v_q(k)$, e o erro de estimação, $e_p(k)$, em função de um erro de estimação genérico $e_l(k)$, quando o q-ésimo controlador está activo. A interconexão do estimador, controlador e do processo encontra-se representada na figura 3.10.

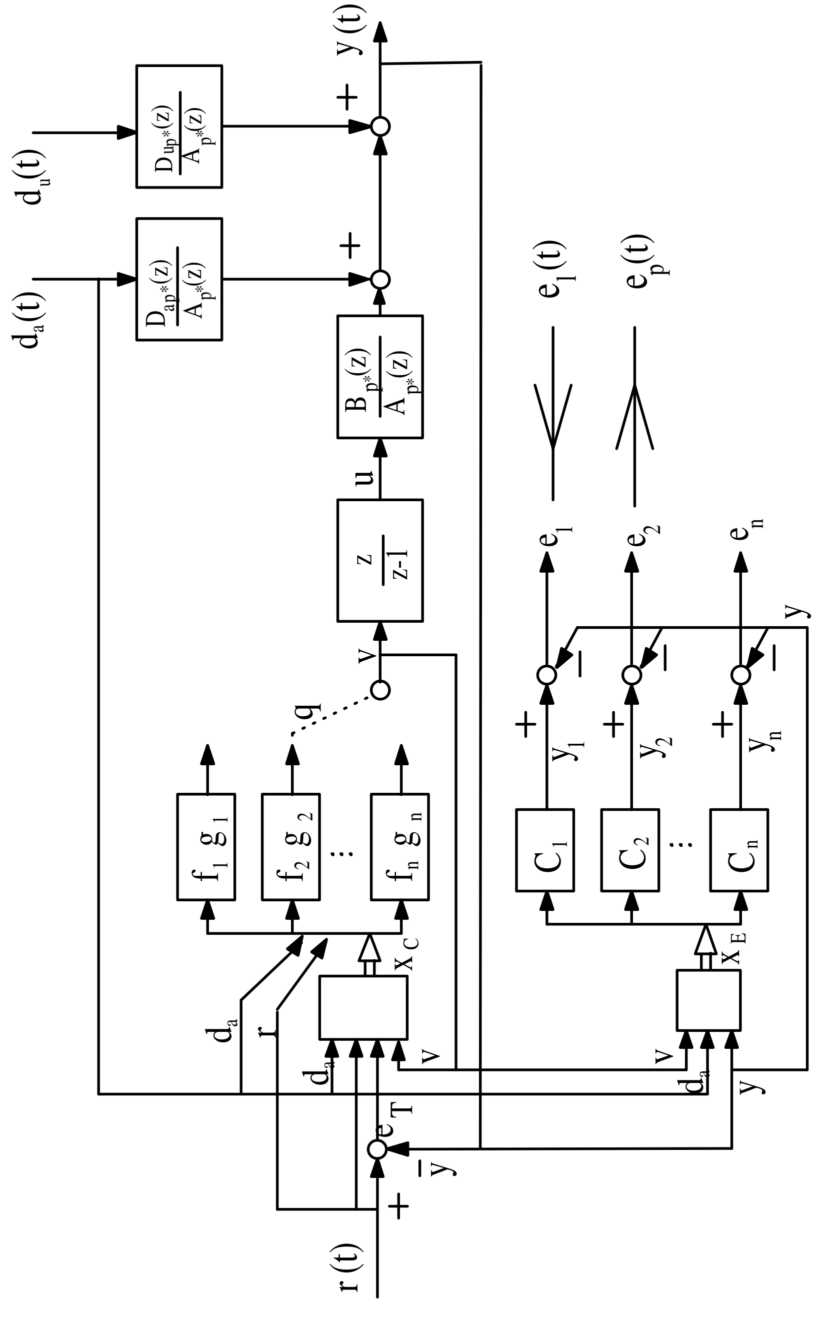

Fig. 3.10: Modelos do processo e Controladores.

3.8 Detectabilidade do sistema composto

Considere-se o sistema composto (3.160-3.161) com $q = p$, *i.e.*, quando o erro de estimação na saída considerada p é o correspondente ao controlador activo q.

Por definição [67][1] o sistema é detectável através da saída $e_q(k)$ *sse* existe um K tal que

$$A_l + bf_{pl} + KC_{pl} \;\; \acute{e} \;\; est\acute{a}vel \tag{3.164}$$

Considere-se K definido por

$$K = -d - bg_{ep} \tag{3.165}$$

Mostra-se no apêndice a este capítulo, apêndice 3.A, que

$$A_l + bf_{pl} + (-d - bg_{ep})C_{pl} = A_p + bf_{pp} \tag{3.166}$$

Além disso, mostra-se no apêndice 3.B, que

$$det(zI - (A_p + bf_{pp})) = ((z-1)A_p(z)R_p(z) + zB(z)S(z))\, A_0^2(z)\omega_C^3(z) \tag{3.167}$$

De acordo com a Hipótese 3.4.2 feita atrás, a interconexão do $p-\acute{e}simo$ modelo com $p-\acute{e}simo$ controlador é estável. Assim, o polinómio característico do sistema em cadeia fechada, dado por

$$(z-1)A_p(z)R_p(z) + zB_p(z)S_p(z) \tag{3.168}$$

tem todas as raízes no interior do círculo unitário

$$|\text{raízes}((z-1)A_p(z)R_p(z) + zB_p(z)S_p(z))| < \lambda_{CL} \tag{3.169}$$

De acordo com a Hipótese 3.3.1

$$|\text{raízes}(A_0(z))| < \lambda_E \tag{3.170}$$

e, de acordo com a Hipótese 3.4.3

$$|\text{raízes}(\omega_C(z))| < \lambda_C \tag{3.171}$$

Deste modo, o sistema resultante em cadeia fechada descrito em (3.164) tem todos os valores próprios no interior do círculo de raio λ_{CECL}, onde

$$\lambda_{CECL} > max\{\lambda_C, \lambda_E, \lambda_{CL}\} \tag{3.172}$$

Assim, o sistema composto (3.160-3.161) é detectável através de $e_q(k)$, o que sugere um supervisor que impõe um índice $q = \sigma(k)$ tal que e_q tenda para zero. Nestas condições, devido à detectabilidade, o estado composto $[\overline{x_E}'\,\overline{x_C}']'$ tenderá para zero. Ou seja, o estado $[x_E'\,x_C']'$ tenderá para o estado de equilíbrio $[x_{Eeq}'\,x_{Ceq}']'$.

[1] Veja-se [67], definição 18.3 pág. 352

3.9 Sinais de desempenho e supervisão

Considere-se que existe uma modelação perfeita do processo pelo modelo correspondente ao índice p^*, e que a perturbação (inacessível) $d_u(k)$ é constante. Assim, de (3.43) e (3.29) pode-se concluir que o erro de estimação $e_{p^*}(k)$ tende exponencialmente para zero, e decai com $\lambda_{\omega E}$:

$$|e_{p^*}(k)| \leq K_E.\lambda_{\omega E}^k \tag{3.173}$$

Definam-se os sinais de desempenho $\pi_p(k)$

$$\pi_p(k) = \sum_{j=0}^{k} e_p^2(j) \tag{3.174}$$

os quais são funções monótonas não decrescentes.

Uma vez que $e_{p^*}(k)$ tende exponencialmente para zero, sendo

$$\lim_{k\to\infty} \pi_{p^*}(k) = \lim_{t\to\infty} \sum_{j=0}^{k} e_{p^*}^2(j) \tag{3.175}$$

vem

$$\lim_{k\to\infty} \pi_{p^*}(k) = C^* < \infty \tag{3.176}$$

Defina-se $\mathcal{P}^*$ como o conjunto dos índices dos modelos cujos sinais de desempenho são majorados por C^*

$$\mathcal{P}^* = \{p\epsilon\mathcal{P} : \forall_{k>0}\ \pi_p(k) \leq C^*\} \tag{3.177}$$

O conjunto $\mathcal{P}^*$ não é um conjunto vazio dado que $p^*\epsilon\mathcal{P}^*$, *i.e.* devido à hipótese de que existe pelo menos um modelo que modela perfeitamente o processo. Se $p\epsilon\mathcal{P}^*$ então

$$\lim_{k\to\infty} \pi_p(k) \leq C^* \tag{3.178}$$

e, deste modo, os erros de predição dos modelos de índice $p\epsilon\mathcal{P}^*$ vão para zero,

$$p\epsilon\mathcal{P}^* \Rightarrow e_p(k) \to 0 \tag{3.179}$$

Se p não pertence a $\mathcal{P}^*$

$$p \notin\mathcal{P}^* \Rightarrow \exists_{k_p<\infty} : \pi_p(k) > C^* \tag{3.180}$$

Dado que $\pi_p(k)$ é monótona não decrescente

$$\forall_{k>k_p}\forall_{p\epsilon\mathcal{P}^*} \qquad \pi_p(k_p) > C^*$$

Considere-se k_p para cada $p \notin\mathcal{P}^*$ e defina-se

$$\overline{k} = \max_{p\notin\mathcal{P}^*}\{k_p\} \tag{3.181}$$

Para $k > \overline{k}$ o melhor (menor) sinal de desempenho pertence necessariamente a $\mathcal{P}^*$, figura 3.11. Considere-se que cada controlador está activo, pelo menos, durante um intervalo de tempo T_D, de acordo com o mecanismo de comutação com tempo de permanência apresentado na secção 3.1. No caso mais pessimista de índice $\sigma(k)$ tem que esperar T_D intervalos de amostragem após $\overline{k}$. Assim, o controlador activo pertence a $\mathcal{P}^*$ após o instante $\overline{k} + T_D$

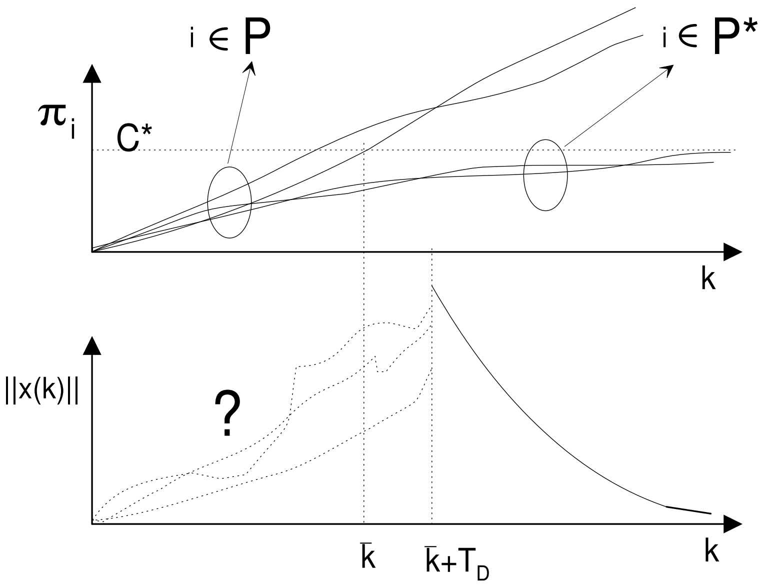

Fig. 3.11: Evolução dos sinais π_i em relação ao instante $\overline{k}$.

$$\forall_{k>\overline{k}+T_D} \ \sigma(k)\epsilon\mathcal{P}^* \tag{3.182}$$

onde $q(k)$ designa o índice do controlador activo.

Deste modo, para $k > \overline{k}+T_D$ o índice $\sigma(k)$ pertencente a $\mathcal{P}^*$, mas não é necessariamente constante podendo comutar entre os vários índices em $\mathcal{P}^*$.

3.10 Estabilidade

Uma vez que o controlador activo $\sigma(k)$ pertence a $\mathcal{P}^*$ após um tempo finito, é neste subconjunto de $\mathcal{P}$ que se investiga a estabilidade do sistema.

Assim, considere-se uma base $\mathcal{C}$ de

$$span\{C_{pp^*} : p\epsilon\mathcal{P}^*\}$$

composta pelos primeiros n_p vectores C_{pp^*} linearmente independentes

$$\mathcal{C} = \{C_{p_Ap^*}, C_{p_Bp^*}, C_{p_Cp^*}, ..., C_{p_Xp^*}\} \tag{3.183}$$

onde n_p

$$n_p = rank \begin{bmatrix} C_{p_1p^*} \\ C_{p_2p^*} \\ \vdots \\ C_{p_kp^*} \end{bmatrix} \tag{3.184}$$

e os índices $\{p1, p2, ..., pk\}$ são o conjunto dos p's que pertencem a $\mathcal{P}^*$.

$$\{p_A, p_B, p_C, ..., p_X\} \subset \{p_2, p_2, p_3, ..., p_n\} = \mathcal{P}^* \tag{3.185}$$

Dado que $\mathcal{C}$ é uma base de

$$span\{C_{pp^*} : p\epsilon\mathcal{P}^*\}$$

então, para qualquer $p\,\epsilon\mathcal{P}^*$, existe uma combinação linear de $\mathcal{C}$ que gera os vectores C_{pp^*}, ou seja:

$$S_1(p)C_{p_Ap^*} + S_2(p)C_{p_Ap^*} + S_3(p)C_{p_Ap^*} + ... + S_{n_p}(p)C_{p_Ap^*} = C_{pp^*} \tag{3.186}$$

onde $S_i(p)$ são escalares majorados. Seja C a matriz composta pelos vectores de $\mathcal{C}$, dados por

$$C = \begin{bmatrix} C_{p_Ap^*} \\ C_{p_Bp^*} \\ \vdots \\ C_{p_Xp^*} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{p_A} - C_{p^*} & | & 0 \\ C_{p_B} - C_{p^*} & | & 0 \\ \vdots & | & \vdots \\ C_{p_X} - C_{p^*} & | & 0 \end{bmatrix} \tag{3.187}$$

$$\forall_{p\epsilon\mathcal{P}^*}\exists_{S(p)\epsilon R^{n_p}} : S(p)C = C_{pp^*} \tag{3.188}$$

Considere-se que o vector $\overline{e}(k)$, que vai ser utilizado em seguida, é definido por

$$\overline{e}(k) = Cx(k) = \begin{bmatrix} C_{p_A} - C_{p^*} & | & 0 \\ C_{p_B} - C_{p^*} & | & 0 \\ \vdots & | & \vdots \\ C_{p_X} - C_{p^*} & | & 0 \end{bmatrix} x(k) \tag{3.189}$$

Pela definição de $x(k)$ dada por (3.154) (3.189), com (3.37), subtraindo e adicionando $y(k)$, obtém-se

$$\overline{e}(k) = \begin{bmatrix} e_{p_A}(k) - e_{p^*}(k) \\ e_{p_B}(k) - e_{p^*}(k) \\ \vdots \\ e_{p_X}(k) - e_{p^*}(k) \end{bmatrix} \tag{3.190}$$

Uma vez que os erros de perdição $\{e_{p_A}(k), e_{p_B}(k), ..., e_{p_X}(k)\}$ tendem para zero, então, também as entradas de $\overline{e}(k)$ tendem para zero. Considere-se (3.160-3.161) com $l = p^*$ e $q = p\epsilon\mathcal{P}^*$

$$x(k+1) = (A_{p^*} + bf_{pp^*})x(k) + (d + bg_{ep})e_{p^*}(k) \tag{3.191}$$

$$e_p(k) = C_{pp^*}x(k) + e_l(k) \tag{3.192}$$

$$v_p(k) = f_{pp^*}x(k) + g_{ep}e_p^*(k) \tag{3.193}$$

$$e_T(k) = \begin{bmatrix} -C_{p^*} & 0 \end{bmatrix} x(k) + e_p^*(k) \tag{3.194}$$

Some-se e subtraia-se $(-d - bg_{ep^*})S(p)C\,x(k)$ de (3.191) com d e b dados por (3.149,3.150), de modo a obter-se

$$\begin{aligned} x(k+1) &= (A_{p^*} + bf_{pp^*})x(k) + (-d - bg_{ep^*})\,S(p)\,C\,x(k) \\ &- (-d - bg_{ep^*})\,S(p)\,C\,x(k) + (d + bg_{ep})e_{p^*}(k) \end{aligned} \tag{3.195}$$

ou

$$\begin{aligned} x(k+1) &= (A_{p^*} + bf_{pp^*} + (-d - bg_{ep^*})\,S(p)\,C))x(k) \\ &- (-d - bg_{ep^*})\,S(p)\,C\,x(k) + (d + bg_{ep})e_{p^*}(k) \end{aligned} \tag{3.196}$$

Substituindo por (3.188) e (3.189)

$$\begin{aligned} x(k+1) &= (A_{p^*} + bf_{pp^*} + (-d - bg_{ep^*})\,C_{pp^*}))x(k) \\ &- (-d - bg_{ep^*})\,S(p)\,\overline{e}(k) + (d + bg_{ep})e_{p^*}(k) \end{aligned} \tag{3.197}$$

Usando (3.166), de (3.197) obtém-se

$$x(k+1) = (A_p + bf_{pp})x(k) - (-d - bg_{ep^*})\,S(p)\,\overline{e}(k) + (d + bg_{ep})e_{p^*}(k) \tag{3.198}$$

Conclusões Duas conclusões se podem tirar de (3.198), dado que:

- $(A_p + bf_{pp})$ tem valores próprios estáveis (apêndice 3.B)
- $S(q)$ é majorado.
- os sinais de entrada $\overline{e}(k)$ e $e_{p^*}(k)$ vão exponencialmente para zero

Caso 1 Considerando o índice p fixo, ou seja, para um índice do controlador activo constante ($\sigma = p\epsilon\mathcal{P}^*$), tem-se que o estado composto $x(k)$ também vai exponencialmente para zero.

$$x(k) \to 0$$

e como consequência de (3.194), tem-se que

$$e_T(k) \to 0 \qquad y(k) \to r(k)$$

Caso 2 De (3.182), observa-se que, pelo facto de $\sigma \in \mathcal{P}^*$ para, $k > \bar{k}_p + T_D$ não se pode concluir que $\sigma(k)$ seja constante. Se $q(k)$ não é constante pode verificar-se a situação em que a comutação entre sistemas lineares estáveis (sem tempo de permanência) conduz a um sistema variável no tempo instável, como se mostra no capítulo 2.

Deste modo com um mecanismo de comutação com imposição de um tempo de permanência, cada controlador é forçado a permanecer activo, pelo menos, um período de tempo T_D.

Aplicando o lema 2.2.5 então (para $k > \bar{k}_p + T_D$) existe sempre um T_D tal que o sistema composto é uniformemente exponencialmente estável.

Assim, o sistema comutado é exponencialmente estável e o estado modificado tende para zero.

$$[\overline{x_E}(k)\overline{x_C}(k)] \to 0 \qquad e_T(k) \to 0$$

donde

$$y(k) \to r(k) \qquad v(k) \to 0$$

tem-se ainda que a entrada do processo $u(k)$ tende para um valor constante. Uma vez que o processo é detectável, se $u(k)$ e $y(k)$ tendem para constantes, tem-se que o estado do processo

$$x_P(k) \to \; constante$$

Note-se que a Conclusão (**1**) se refere à situação na qual o índice do controlador activo, q, é constante e pertence a $\mathcal{P}^*$ após um tempo finito. A conclusão (**2**) refere-se à situação em que o índice q pode variar (dentro do conjunto $\mathcal{P}^*$), de acordo com o mecanismo de comutação com tempo de permanência T_D.

Os resultados obtidos podem ser sintetizados no seguinte teorema.

Teorema 3.10.1 *Considere-se a interconexão de um processo descrito pelo modelo (3.32), de um multi-estimador E,(3.36), (3.37), de um multi-controlador K (3.86), (3.87), e de um supervisor com sinais de desempenho dados por (3.174) e um mecanismo de comutação que impõe um tempo de permanência T_D ao controlador K_i. Então, existe um tempo de permanência T_D tal que o sistema composto estimador, controlador, processo e avaliador de desempenho é exponencialmente estável.*

Este teorema estende aos sistemas com perturbações acessíveis, em sistemas discretos, um resultado análogo publicado em [46] para sistemas contínuos.

Note-se que o estado do avaliador de desempenho π tem um norma não decrescente (por definição de π_i). No entanto, a redefinição dos sinais de desempenho de forma a incluir um factor de esquecimento λ_π

$$\pi_i'(k+1) = \lambda_\pi \pi_i'(k) + e_i^2(k) \tag{3.199}$$

permite obter sinais de desempenho limitados e que decaem para zero com e_i ao mesmo tempo que fazem uma avaliação equivalente dos erros de seguimento, uma vez que só diferem num factor

$$\pi_i'(k) = \pi_i(k)\lambda_\pi^k \tag{3.200}$$

tal como se mostra em [46].

3.11 Conclusões

Neste Capítulo introduz-se a estrutura do controlo comutado baseado em modelos múltiplos, e descrevem-se os blocos que o constituem - estimador, controlador, avaliador de desempenho e mecanismo de comutação. Analisam-se algumas propriedades dessa estrutura que são uma base para os resultados teóricos deste Capítulo, bem como dos capítulos seguintes. Como principal resultado deste Capítulo, os resultados teóricos existentes sobre a estabilidade de sistemas de controlo comutados aplicados a sistemas lineares invariantes e sob a hipótese de modelação perfeita são extendidos para o caso em que existem perturbações acessíveis, Teorema 3.10.1. A demonstração do Teorema 3.10.1 passa pela definição dos controladores e estimadores na forma de estado partilhado (Proposições 3.3.1 e 3.4.1) e pela construção de um sistema composto de estado $[x_E', x_C']'$ definido em torno do ponto de equilíbrio, Proposição 3.7.1. Os resultados sobre a detectabilidade do sistema composto demonstrados nos Apêndices 3.A e 3.B são uma base para as demonstrações de estabilidade nos Capítulos 4 e 5.

Apêndices ao capítulo 3

3.A Demonstração da equação (3.166)

Demonstra-se a seguir a igualdade (3.166)

$$A_l + bf_{pl} + (-d - bg_{ep})C_{pl} = A_p + bf_{pp} \tag{3.201}$$

Onde as variáveis A_l, b, f_{pl}, d, g_{ep}, e C_{pl} são definidas por (3.149-3.153).

Demonstração

$$A_l + bf_{pl} + (-d - bg_{ep})C_{pl} = \tag{3.202}$$

$$\left[\begin{array}{ccccccc} A_E & 0 & 0 & & & & \\ 0 & A_E & 0 & & & \underline{0} & \\ 0 & 0 & A_E & & & & \\ & & & A_C & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & A_C & 0 & 0 \\ & \underline{0} & & 0 & 0 & A_C & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 & A_C \end{array}\right] -d\left[\begin{array}{cc} C_l & 0 \end{array}\right] \;\; +b\left[\begin{array}{c|c} -g_{eq}C_l & f_p \end{array}\right]$$

$$+(-d - bg_{ep})\left[\begin{array}{c|c} C_p - C_l & 0 \end{array}\right] \tag{3.203}$$

Por uma questão de simplicidade das manipulações algébricas defina-se

$$A_{3E4C} = \left[\begin{array}{ccccccc} A_E & 0 & 0 & & & & \\ 0 & A_E & 0 & & & \underline{0} & \\ 0 & 0 & A_E & & & & \\ & & & A_C & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & A_C & 0 & 0 \\ & \underline{0} & & 0 & 0 & A_C & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 & A_C \end{array}\right] \tag{3.204}$$

$$\begin{aligned} A_l + bf_{pl} + (-d - bg_{ep})C_{pl} = \;& A_{3E4C} - d\left[\begin{array}{cc} C_l & 0 \end{array}\right] \;\; +b\left[\begin{array}{c|c} -g_{eq}C_l & f_p \end{array}\right] \\ & -d\left[\begin{array}{c|c} C_p - C_l & 0 \end{array}\right] - bg_{ep}\left[\begin{array}{c|c} C_p - C_l & 0 \end{array}\right] \end{aligned} \tag{3.205}$$

$$\begin{aligned} A_l + bf_{pl} + (-d - bg_{ep})C_{pl} = \;& A_{3E4C} - d\left[\begin{array}{cc} C_l + C_p - C_l & 0 \end{array}\right] \;\; +b\left[\begin{array}{c|c} -g_{eq}C_l & f_p \end{array}\right] \\ & -b\left[\begin{array}{c|c} g_{ep}C_p - g_{ep}C_l & 0 \end{array}\right] \end{aligned} \tag{3.206}$$

$$A_l + bf_{pl} + (-d - bg_{ep})C_{pl} = \;\; A_{3E4C} - d\left[\begin{array}{cc} C_p & 0 \end{array}\right] \;\; +b\left[\begin{array}{c|c} -g_{eq}C_l - g_{ep}C_p + g_{ep}C_l & f_p \end{array}\right] \tag{3.207}$$

$$A_l + bf_{pl} + (-d - bg_{ep})C_{pl} = \;\; A_{3E4C} - d\left[\begin{array}{cc} C_p & 0 \end{array}\right] \;\; +b\left[\begin{array}{c|c} -g_{ep}C_p & f_p \end{array}\right] \tag{3.208}$$

De acordo com a definição de A_l, e f_{pl}, e tendo em consideração a mudança de índices, tem-se

$$A_l + bf_{pl} + (-d - bg_{ep})C_{pl} = A_p + bf_{pp} \tag{3.209}$$

3.B Demonstração da equação (3.167)

O objectivo da demonstração é determinar a estabilidade do sistema composto, o qual é definido pela equação (3.167). Considere-se a matriz da dinâmica

$$M = A_p + bf_{pp} \tag{3.210}$$

Assim, as raízes de $det(zI - M)$ deverão estar todas no interior do círculo unitário.

$$|raizes\{det(zI - (A_p + bf_{pp}))\}| < 1 \tag{3.211}$$

e

$$det(zI - (A_p + bf_{pp})) = (zS(z)\alpha(z) + (z-1)R(z)A(z))\,\omega_C(z)^2 A_0(z)^3 \tag{3.212}$$

Demonstração Por uma questão de simplicidade das manipulações algébricas definam-se

$$B_{E1} = \begin{bmatrix} b_E \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad B_{E2} = \begin{bmatrix} 0 \\ b_E \\ 0 \end{bmatrix} \qquad A_{3E} = \begin{bmatrix} A_E & 0 & 0 \\ 0 & A_E & 0 \\ 0 & 0 & A_E \end{bmatrix} \tag{3.213}$$

$$B_{C1} = \begin{bmatrix} 0 \\ b_C \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad B_{C2} = \begin{bmatrix} -b_C \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad A_{4C} = \begin{bmatrix} A_C & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_C \end{bmatrix} \tag{3.214}$$

Assim, de (3.151-3.153), as constantes b, d, e M podem ser expressas por

$$b = \begin{bmatrix} -B_{E1} \\ B_{C2} \end{bmatrix} \qquad d = \begin{bmatrix} B_{E2} \\ B_{C1} \end{bmatrix} \tag{3.215}$$

$$M = A_p + bf_{pp} = A_{3E4C} - d\begin{bmatrix} C_p & | & 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} -g_{ep}C_p & | & f_p \end{bmatrix} \tag{3.216}$$

$$M = \begin{bmatrix} A_{3E} & 0 \\ 0 & A_{4C} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} B_{E1} \\ B_{C2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_p & | & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{E2} \\ B_{C1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -g_p C_p & | & f_p \end{bmatrix} \tag{3.217}$$

$$M = \begin{bmatrix} A_{3E} + B_{E1}C_p - B_{E2}g_pC_p & | & B_{E2}f_p \\ -B_{C2}C_p - B_{C1}g_pC_p & | & A_{4C} + B_{C1}f_p \end{bmatrix} \tag{3.218}$$

a matriz M pode ser reescrita

$$M = \begin{bmatrix} (A_{3E} + B_{E1}C_p) & | & 0 \\ -(B_{C2} + B_{C1}g_p)C_p & | & (A_{4C} + B_{C1}f_p) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{E2} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -g_pC_p & | & f_p \end{bmatrix} \tag{3.219}$$

Assim,

$$det(zI - M) = det(zI - (\mathcal{A} + \mathcal{B}\mathcal{C})) \tag{3.220}$$

com

$$M = \mathcal{A} + \mathcal{B}\mathcal{C} \tag{3.221}$$

onde

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} (A_{3E} + B_{E1}C_p) & | & 0 \\ -(B_{C2} + B_{C1}g_p)C_p & | & (A_{4C} + B_{C1}f_p) \end{bmatrix} \tag{3.222}$$

$$\mathcal{B} = \begin{bmatrix} B_{E2} \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \mathcal{C} = \begin{bmatrix} -g_pC_p & | & f_p \end{bmatrix} \tag{3.223}$$

Uma vez que se tem [26]:

$$det(zI - (A + BC)) = (1 - C(zI - A)^{-1}B)\, det(zI - A) \tag{3.224}$$

vem,

$$det(zI - M) = (1 - \mathcal{C}(zI - \mathcal{A})^{-1}\mathcal{B})\, det(zI - \mathcal{A}) \tag{3.225}$$

$$det(zI - M) =$$

$$= \left\{ 1 - \begin{bmatrix} -g_pC_p & | & f_p \end{bmatrix} \left(zI - \begin{bmatrix} A_{3E} + B_{E1}C_p & 0 \\ -(B_{C2} + B_{C1}g_p) & A_{4C} + B_{C1}f_p \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} B_{E2} \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$
$$\times\, det\left(zI - \begin{bmatrix} A_{3E} + B_{E1}C_p & 0 \\ -(B_{C2} + B_{C1}g_p) & A_{4C} + B_{C1}f_p \end{bmatrix} \right) \tag{3.226}$$

Sabe-se que [26]:

$$det \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & B \end{bmatrix} = det(A)\, det(B) \tag{3.227}$$

Assim,

$$det\left(\begin{bmatrix} zI - (A_{3E} + B_{E1}C_p) & 0 \\ -(B_{C2} + B_{C1}g_p) & zI - (A_{4C} + B_{C1}f_p) \end{bmatrix} \right) =$$
$$= det(zI - (A_{3E} + B_{E1}C_p))det(zI - (A_{4C} + B_{C1}f_p))$$

$$= det(zI - A_{3E})C_p(zI - A_{3E})^{-1}B_{E1}\, det(zI - A_{4C})f_p(zI - A_{4C})^{-1}B_{C1} \tag{3.228}$$

O inverso de uma matriz por blocos [26], é dado por

$$\left[\begin{array}{cc} A & 0 \\ C & B \end{array}\right]^{-1} = \left[\begin{array}{cc} A^{-1} & 0 \\ -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1} \end{array}\right] \tag{3.229}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
&1 - \left[\begin{array}{c|c} -g_pC_p & f_p \end{array}\right] \left(zI - \left[\begin{array}{cc} A_{3E} + B_{E1}C_p & 0 \\ -(B_{C2} + B_{C1}g_p) & A_{4C} + B_{C1}f_p \end{array}\right]\right)^{-1} \left[\begin{array}{c} B_{E2} \\ 0 \end{array}\right] = \\
&= 1 - \left[\begin{array}{c|c} -g_pC_p & f_p \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc} (zI - (A_{3E} + B_{E1}C_p))^{-1} & 0 \\ \begin{array}{c} -(zI - (A_{4C} + B_{C1}))^{-1} \\ \times(B_{C2} + B_{C1}g_p) \\ \times(zI - (A_{3E} + B_{E1}C_p))^{-1} \end{array} & (zI - (A_{4C} + B_{C1}))^{-1} f_p \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} B_{E2} \\ 0 \end{array}\right] \\
&= 1 - \left[\begin{array}{c|c} -g_pC_p & f_p \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} (zI - (A_{3E} + B_{E1}C_p))^{-1}B_{E2} \\ \begin{array}{c} -(zI - (A_{4C} + B_{C1}f_p))^{-1}(B_{C2} + B_{C1}g_p) \\ \times(zI - (A_{3E} + B_{E1}C_p))^{-1}B_{E2} \end{array} \end{array}\right] \\
&= 1 + g_pC_p(zI - (A_{3E} + B_{E1}C_p))^{-1}B_{E2} + \\
&\quad + f_p(zI - (A_{4C} + B_{C1}f_p))^{-1}(B_{C2} + B_{C1}g_p)(zI - (A_{3E} + B_{E1}C_p))^{-1}B_{E2} \\
&= 1 + \left(g_p + f_p(zI - (A_{4C} + B_{C1}f_p))^{-1}(B_{C2} + B_{C1}g_p)\right)\left(C_p(zI - (A_{3E} + B_{E1}C_p))^{-1}B_{E2}\right)
\end{aligned} \tag{3.230}$$

Pode-se demonstrar (apêndice 3.C) que

$$D + C(zI - (A + B_1C))^{-1}(B_1D + B_2) = \frac{D + C(zI - A)^{-1}B_2}{1 - C(zI - A)B_1} \tag{3.231}$$

Usando a equação (3.231) em (3.230), obtém-se

$$\begin{aligned}
&1 - \left[\begin{array}{c|c} -g_pC_p & f_p \end{array}\right] \left(zI - \left[\begin{array}{cc} A_{3E} + B_{E1}C_p & 0 \\ -(B_{C2} + B_{C1}g_p) & A_{4C} + B_{C1}f_p \end{array}\right]\right)^{-1} \left[\begin{array}{c} B_{E2} \\ 0 \end{array}\right] = \\
&\qquad = 1 + \frac{g_p + f_p(zI - A_{4C})^{-1}B_{C2}}{1 - f_p(zI - A_{4C})^{-1}B_{C1}} \, \frac{C_p(zI - A_{3E})^{-1}B_{E2}}{1 - C_p(zI - A_{3E})^{-1}B_{E1}}
\end{aligned} \tag{3.232}$$

De (3.226), (3.228) e (3.232)

$$\begin{aligned}
det(zI - M) &= det(zI - A_{3E})C_p(zI - A_{3E})^{-1}B_{E1}\, det(zI - A_{4C})f_p(zI - A_{4C})^{-1}B_{C1} \\
&\quad \times \left\{1 + \frac{g_p + f_p(zI - A_{4C})^{-1}B_{C2}}{1 - f_p(zI - A_{4C})^{-1}B_{C1}} \, \frac{C_p(zI - A_{3E})^{-1}B_{E2}}{1 - C_p(zI - A_{3E})^{-1}B_{E1}}\right\}
\end{aligned} \tag{3.233}$$

Das definições (3.112) e (3.111), obtém-se

$$g_p + f_p(zI - A_{4C})^{-1}B_{C2} = g_p + f_p \left(zI - \begin{bmatrix} A_C & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_C \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ b_C \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.234}$$

$$1 - f_p(zI - A_{4C})^{-1}B_{C1} = 1 - f_p \left(zI - \begin{bmatrix} A_C & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_C \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} b_C \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.235}$$

$$C_p(zI - A_{3E})^{-1}B_{E2} = C_p \left(zI - \begin{bmatrix} A_E & 0 & 0 \\ 0 & A_E & 0 \\ 0 & 0 & A_E \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ b_E \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.236}$$

$$1 - C_p(zI - A_{3E})^{-1}B_{E1} = 1 - C_p \left(zI - \begin{bmatrix} A_E & 0 & 0 \\ 0 & A_E & 0 \\ 0 & 0 & A_E \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} b_E \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.237}$$

Assim, de acordo com as definições de C_p, f_p, e g_p

$$g_{ep} + f_p(zI - A_{4C})^{-1}B_{C2} = \frac{S(z)}{\omega_C(z)} \tag{3.238}$$

$$f_p(zI - A_{4C})^{-1}B_{C1} = \frac{R(z)}{\omega_C(z)} \tag{3.239}$$

$$1 - C_p(zI - A_{3E})^{-1}B_{E2} = \frac{zB(z)}{A_0(z)} \tag{3.240}$$

$$C_p(zI - A_{3E})^{-1}B_{E1} = \frac{(z-1)A(z)}{A_0(z)} \tag{3.241}$$

Substituindo (3.238-3.241) em (3.233)

$$\begin{aligned} det(zI - M) &= \\ &= det(zI - A_{3E})\,\frac{(z-1)A(z)}{A_0(z)}\,det(zI - A_{4C})\,\frac{R(z)}{\omega_C(z)} \\ &\quad\times\left\{1 + \frac{S(z)}{\omega_C(z)}\,\frac{\omega_C(z)}{R(z)}\,\frac{zB(z)}{A_0(z)}\,\frac{A_0(z)}{(z-1)A(z)}\right\} \\ &= A_0^3(z)\frac{(z-1)A(z)}{A_0(z)}\omega_C^4(z)\frac{R(z)}{\omega_C(z)} \times \left\{1 + \frac{S(z)}{R(z)}\,\frac{zB(z)}{(z-1)A(z)}\right\} \\ &= ((z-1)A(z)R(z) + zB(z)S(z))\; A_0^2(z)\omega_C^3(z) \end{aligned} \tag{3.242}$$

3.C Demonstração da equação (3.231)

$$D + C(zI - (A + B_1C))^{-1}(B_1D + B_2) = \frac{D + C(zI - A)^{-1}B_2}{1 - C(zI - A)^{-1}B_1} \tag{3.243}$$

Demonstração Aplicando o lema da inversão de matrizes ao lado esquerdo da equação, tem-se

$$\begin{aligned}
&D + C(zI - (A + B_1C))^{-1}(B_1D + B_2) = \\
&= D + C\left((zI - A)^{-1} - (zI - A)^{-1}B_1(C(zI - A)^{-1}B_1 - 1)^{-1}\right. \\
&\qquad \left.\times C(zI - A)^{-1}\right)(B_1D + B_2) \\
&= D + C(zI - A)^{-1}(B_1D + B_2) - C(zI - A)^{-1}B_1(C(zI - A)^{-1}B_1 - 1)^{-1} \\
&\qquad \times C(zI - A)^{-1}(B_1D + B_2)
\end{aligned}$$

Pode observar-se que $X(X + I)^{-1} = (X + I)^{-1}X$, assim

$$\begin{aligned}
&= D + C(zI - A)^{-1}(B_1D + B_2) - (C(zI - A)^{-1}B_1 - 1)^{-1}C(zI - A)^{-1}B_1 \\
&\qquad \times C(zI - A)^{-1}(B_1D + B_2) \\
&= (C(zI - A)^{-1}B_1 - 1)^{-1}(C(zI - A)^{-1}B_1 - 1)D \\
&\qquad + (C(zI - A)^{-1}B_1 - 1)^{-1}(C(zI - A)^{-1}B_1 - 1)C(zI - A)^{-1}(B_1D + B_2) \\
&\qquad - (C(zI - A)^{-1}B_1 - 1)^{-1}C(zI - A)^{-1}B_1C(zI - A)^{-1}(B_1D + B_2) \\
&= (C(zI - A)^{-1}B_1 - 1)^{-1}\left\{(C(zI - A)^{-1}B_1 - 1)D\right. \\
&\qquad + (C(zI - A)^{-1}B_1 - 1)C(zI - A)^{-1}(B_1D + B_2) \\
&\qquad \left. - C(zI - A)^{-1}B_1C(zI - A)^{-1}(B_1D + B_2)\right\} \\
&= (C(zI - A)^{-1}B_1 - 1)^{-1}\{(C(zI - A)^{-1}B_1 - 1)D - C(zI - A)^{-1}(B_1D + B_2)\} \\
&= (C(zI - A)^{-1}B_1 - 1)^{-1}\{(C(zI - A)^{-1}B_1D - D - C(zI - A)^{-1}(B_1D + B_2)\}
\end{aligned}$$

$$= (C(zI - A)^{-1}B_1 - 1)^{-1}\left\{-D - C(zI - A)^{-1}B_2\right\} \tag{3.244}$$

Assim, para um sistema SISO, tem-se

$$D + C(zI - (A + B_1C))^{-1}(B_1D + B_2) = \frac{D + C(zI - A)^{-1}B_2}{1 - C(zI - A)^{-1}B_1} \tag{3.245}$$

$Q.E.D.$

3.D Modos não observáveis e não controláveis por composição de sistemas

Neste apêndice mostra-se o aparecimento de modos não controláveis e não observáveis por composição de sistemas sem factores comuns ao numerador e denominador.

Consideram-se três situações:

- **Caso 1** Dois sistemas em série, em que o denominador do primeiro coincide com o numerador do segundo.
- **Caso 2** Dois sistemas em série, em que o denominador do segundo coincide com o numerador do primeiro.
- **Caso 3** Sistemas em paralelo com soma nula dos numeradores.

De modo a facilitar as manipulações com sistemas na forma canónica companheira, defina-se

$$A(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + ... + a_n \tag{3.246}$$

$$A_0(z) = z^n + a_{01} z^{n-1} + a_{02} z^{n-2} + ... + a_{0n} \tag{3.247}$$

$$B(z) = b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + b_2 z^{n-2} + ... + b_n \tag{3.248}$$

e

$$\underline{a} = [\, a_1 \, a_2 \, ... \, a_n]' \tag{3.249}$$

$$\underline{a}_0 = [\, a_{01} \, a_{02} \, ... \, a_{0n}]' \tag{3.250}$$

$$\underline{b} = [\, b_1 \, b_2 \, ... \, b_n]' \tag{3.251}$$

$$\underline{I} = \begin{bmatrix} I \\ 0 \ldots 0 \end{bmatrix} \tag{3.252}$$

Caso 1 Sistema $\frac{B}{A}$ em série com $\frac{A}{A_0}$

Considerem-se realizações na forma canónica companheira do observador. Assim, para $\frac{B}{A}$ e $\frac{A}{A_0}$ tem-se respectivamente,

$$x_1(k+1) \; = \; [\, \underline{a} \,|\, \underline{I} \,] \, x_1(k) \; + \; [\, \underline{b} - b_0 \underline{a} \,] \, u(k) \tag{3.253}$$

$$y_1(k) \; = \; [\, 1 \,|\, 0 \,] \, x_1(k) \; + [\, b_0 \,] \, u(k) \tag{3.254}$$

e

$$x_2(k+1) \; = \; [\underline{a}_0 \,|\, \underline{I}] \, x_2(k) \; + \; [\underline{a} - 1\underline{a}_0] \, u_2(k) \tag{3.255}$$

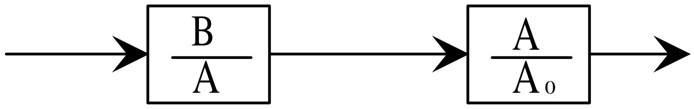

Fig. 3.12: Sistema $\frac{B}{A}$ em série com $\frac{A}{A_0}$.

$$y(k) \;=\; [\,1\,|\,0\,]\,x_2(k)\;+[\,1\,]\,u_2(k) \tag{3.256}$$

Para sistema resultante da composição em série (figura 3.12), obtém-se

$$x(k+1) = \left[\begin{array}{cc} \underline{a}\,|\,\underline{I} & 0\,|\,0 \\ \underline{a}-\underline{a}_0\,|\,0 & \underline{a}_0\,|\,\underline{I} \end{array}\right] x(k) + \left[\begin{array}{c} \underline{b}-b_0\,\underline{a}_0 \\ (\underline{a}-\underline{a}_0)\,b_0 \end{array}\right] u(k) \tag{3.257}$$

$$y(k) \;=\; [\,1\,|\,0\;\;1\,|\,0\,]\,x(k)\;+[\,b_0\,]\,u(k) \tag{3.258}$$

Aplicando uma transformação de semelhança T

$$T = \left[\begin{array}{cc} I & 0 \\ I & I \end{array}\right] \tag{3.259}$$

$$\begin{array}{cc} A' = TAT^{-1} & B' = TB \\ C' = CT^{-1} & D' = D \end{array} \tag{3.260}$$

obtém-se

$$x(k+1) = \left[\begin{array}{cc} \underline{a}\,|\,\underline{I} & 0\,|\,0 \\ 0\,|\,0 & \underline{a}_0\,|\,\underline{I} \end{array}\right] x(k) + \left[\begin{array}{c} \underline{b}-b_0\,\underline{a} \\ \underline{b}-b_0\,\underline{a}_0 \end{array}\right] u(k) \tag{3.261}$$

$$y(k) \;=\; [\,0\,|\,0\;\;1\,|\,0\,]\,x(k)\;+[\,b_0\,]\,u(k) \tag{3.262}$$

Por inspecção da estrutura das matrizes A', B', C', e D' conclui-se que a realização resultante é uma decomposição de Kalman com um subsistema controlável e observável e um subsistema controlável não observável (figura 3.13). Note-se que o subsistema

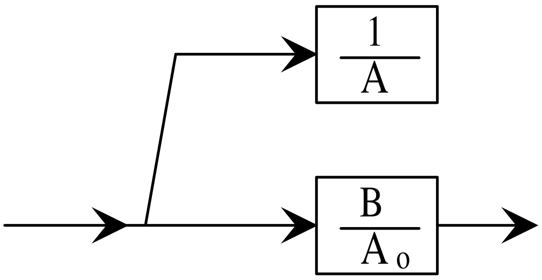

Fig. 3.13: Subsistema observável e não observável.

não observável se encontra simbolizado por $\frac{1}{A(z)}$, o que representa um subsistema com polinómio característico $A(z)$, e não uma verdadeira função de transferência. Uma vez que não existe saída nesse subsistema não existe relação entrada-saída.

Caso 2 Dois sistemas em série, em que o denominador do segundo coincide com o numerador do primeiro.

Partindo de realizações na forma canónica do controlador, o resultado é o dual do anterior, obtendo-se um subsistema observável controlável, e um subsistema observável não controlável.

Caso 3 Sistema $\frac{B}{A}$ em paralelo com $\frac{B}{A}$

Para sistema resultante da composição em paralelo (figura 3.14), obtém-se

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} \underline{a}\,|\,\underline{I} & 0\,|\,0 \\ 0\,|\,0 & \underline{a}\,|\,\underline{I} \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} \underline{b} - b_0\,\underline{a}_0 \\ \underline{b} - b_0\,\underline{a}_0 \end{bmatrix} u(k) \tag{3.263}$$

$$y(k) = [\,1\,|\,0 \;\; 1\,|\,0\,]\, x(k) + [\,b_0 - b_0\,]\, u(k) \tag{3.264}$$

Aplicando uma transformação de semelhança T

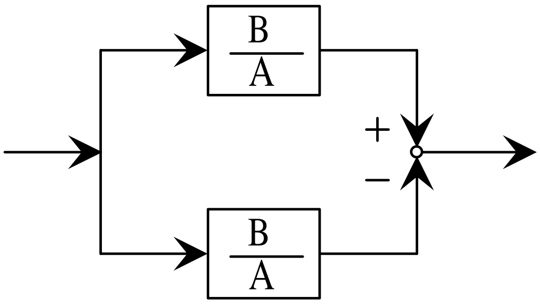

Fig. 3.14: Sistema $\frac{B}{A}$ em paralelo com$\frac{B}{A}$.

$$T = \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & I \end{bmatrix} \tag{3.265}$$

obtém-se

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} \underline{a}\,|\,\underline{I} & 0\,|\,0 \\ 0\,|\,0 & \underline{a}\,|\,\underline{I} \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} \underline{b} - b_0\,\underline{a}_0 \\ 0 \end{bmatrix} u(k) \tag{3.266}$$

$$y(k) = [\,0\,|\,0 \;\; 1\,|\,0\,]\, x(k) + [\,0\,]\, u(k) \tag{3.267}$$

Por inspecção da estrutura das matrizes A', B', C', e D' conclui-se que a realização resultante é uma decomposição de Kalman com um subsistema não controlável e observável e um subsistema controlável não observável (figura 3.15).

Fig. 3.15: Subsistema observável e não observável.

4. Controlo comutado de sistemas variáveis no tempo

> *Neste capítulo analisa-se do ponto de vista da estabilidade um algoritmo de controlo comutado com supervisão aplicado numa classe de processos lentamente variáveis no tempo, sob a condição de modelação perfeita.*

Consideram-se processos descritos por modelos lineares variáveis no tempo com tempo de permanência T_{Dp}, (*i. e.* tal que o intervalo de tempo entre duas alterações da dinâmica do processo é de pelo menos T_{Dp} amostras), e dá-se um majorante para o valor de T_{Dp} que garante a estabilidade do sistema em cadeia fechada.

Note-se que face ao capítulo anterior o problema tratado neste capítulo apresenta características que impõem uma abordagem diferente para a análise da estabilidade. Com efeito:

- O índice do modelo que corresponde ao processo num dado instante p^* não é constante e, consequentemente também não existe o conjunto $\mathcal{P}^*$ o qual é definido em função do limite de π_{p^*} e e_{p^*}. Recorde-se que $\mathcal{P}^*$ é o conjunto dos índices dos modelos preditivos cujos sinais de desempenho π_i[1] são menores ou iguais ao limite de π_{p^*}.
- Uma vez que o processo é variável no tempo, deixa de fazer sentido procurar atingir um erro de seguimento nulo. Mesmo considerando a referência constante, o sinal de entrada do processo u, que leva o erro de seguimento para zero em regime estacionário, muda em função do processo.

Assim, neste capítulo, determina-se um majorante para o valor de T_{Dp} que garante um erro de seguimento majorado e minorado.

[1] No capítulo anterior consideram-se os sinais de desempenho π_i como a soma dos erros quadráticos, ou seja $\lambda_\pi = 1$

4.1 Sistema Composto

Considere-se o processo P num intervalo de tempo tal que possa ser representado por um modelo linear invariante no tempo, estabilizável e detectável com função de transferência da parte controlável e observável dada por $\frac{B}{A}$ com A e B co-primos e $\partial A > \partial B$, $\partial A \leq n$ e definido pelas seguintes equações de estado,

$$\begin{aligned} x_P(k+1) &= A_P x_P(k) + B_P u(k) \\ y(k) &= C_P x_P(k) \end{aligned} \tag{4.1}$$

com modos não observáveis ou não controláveis com valores próprios estrictamente menores que $\lambda_\omega < 1$.

Seja um multi-estimador com estado partilhado definido por

$$x_E(k+1) = \begin{bmatrix} A_E & 0 & 0 \\ 0 & A_E & 0 \\ 0 & 0 & A_E \end{bmatrix} x_E(k) + \begin{bmatrix} b_E \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} y(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ b_E \\ 0 \end{bmatrix} u(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_E \end{bmatrix} d_a(k) \tag{4.2}$$

$$\hat{y}(k) = C\, x_E(k) \tag{4.3}$$

em que $A_0(z) = det(A_E - Iz)$ tem os valores próprios estrictamente menores que $\lambda_E < 1$ e o par $\{A_E, b_E\}$ é controlável.

Seja um controlador realizado na forma de estado partilhado

$$\begin{aligned} x_C(k+1) = &\begin{bmatrix} A_C & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_C \end{bmatrix} x_C(k) + \begin{bmatrix} b_C \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} v(k) + \\ &+ \begin{bmatrix} 0 \\ b_C \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e_T(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_C \\ 0 \end{bmatrix} r(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ b_C \end{bmatrix} d_a(k) \end{aligned} \tag{4.4}$$

em que $det(A_C - Iz)$ tem os valores próprios estrictamente menores que $\lambda_C < 1$, o par $\{A_C, b_C\}$ é controlável, d_a é uma perturbação acessível e e_T designa o erro de seguimento $e_T = r - y$.

O controlador para cada modelo do processo é tal que o sistema realimentado $\{K_i, P_i\}$ tem os valores próprios estrictamente dentro do círculo de raio

$$\lambda_{CL} < 1$$

Considerem-se os sinais de desempenho π, definidos por

$$\pi_i(k+1) = \lambda_\pi \pi_i(k) + e_i^2(k) \tag{4.5}$$

com $\lambda_\pi < 1$. Seja o mecanismo de comutação C definido de modo a impor um tempo de permanência T_D aos controladores. Ou seja, depois de cada comutação o controlador eleito permanece activo pelo menos T_D amostras.

Considere-se o intervalo de tempo $[k_i^*, k_{i+1}^* - 1]$ durante o qual a dinâmica do processo permanece constante. Seja $p^*(k)$ o índice do modelo que descreve o processo em cada instante,

$$p^*(k) \in \mathcal{P} \ constante \quad para \quad k_i^* \leq k < k_{i+1}^* \tag{4.6}$$

Construa-se um sistema composto (fig. 4.1) com estado $\{x_E, x_C\}$, e matriz da dinâmica A_{ij} à semelhança do capítulo anterior, mas considerando como entradas externas além de um erro de estimação e_i, a referência r e a perturbação acessível d_a (ver apêndice 4.A). Neste sistema composto não se faz a modificação de coordenadas feita no capítulo anterior nos estados do estimador e controlador para se obter o estado modificado, uma vez que mesmo com as entradas r e d_a constantes, no caso geral, continuaria a haver diferentes estados de equilíbrio do sistema devido à variação da dinâmica do processo.

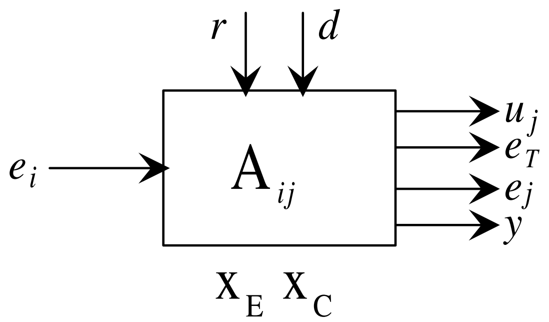

Fig. 4.1: Sistema composto com estado $[\, x_E' \; x_C' \,]'$

Note-se, que sendo impossível garantir que, em geral, e_T tende para zero, se tem como objectivo majorar o ganho das entradas r e d_a para e_T.

Do modelo de estado do processo (4.1), tem-se

$$\begin{aligned} x_P(k+1) &= A_P x_P(k) + B_P u(k) + K C_P x_P - K C_P x_P \\ y(k) &= C_P x_P(k) \end{aligned} \tag{4.7}$$

ou seja

$$x_P(k+1) = (A_P + K C_P) x_P(k) + B_P u(k) - K y(k) \tag{4.8}$$

Uma vez que se admite que o processo P é detectável então, por definição, existe um ganho K tal que $A_P - KC_P$ tem todos os valores próprios no círculo de raio $\lambda_\omega < 1$ [49]. Pode-se, deste modo construir o sistema da figura 4.2, com o estado composto por x_E, x_C, x_P, π e entradas r, d_a, e e_i.

Tenha-se em conta que:

- O avaliador dos sinais de desempenho é um sistema estável, uma vez que $|\lambda_\pi| < 1$, equação (4.5)
- O subsistema que relaciona os sinais u, e y com o estado x_P, é estável, com valores próprios no círculo de raio $\lambda_\omega < 1$.

O problema da análise da estabilidade, no sentido BIBO, do sistema composto centra-se na escolha em cada instante do índice $i(k)$ da equação de estado do sistema composto (fig. 4.1) de modo a garantir a estabilidade do subsistema com matriz da dinâmica $A_{i(k)j}$ e simultaneamente garantir um sinal $e_{i(k)}$ limitado.

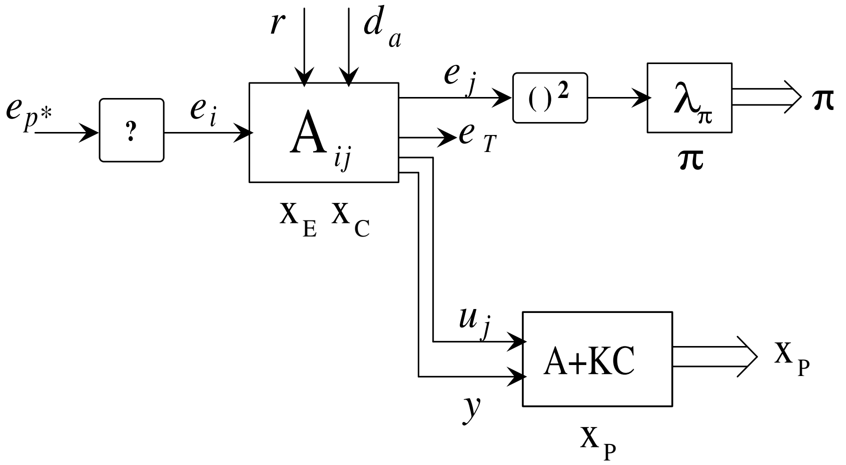

Fig. 4.2: Sistema composto $\{E\,K\,P\,D\}$

Uma vez que o comportamento do sinal e_{p*} vem definido directamente da hipótese de modelação perfeita, há ainda que estabelecer uma relação entre e_{p*} e $e_{i(k)}$ de modo a garantir a estabilidade do sistema.

4.2 Construção do sinal $\overline{\sigma}(k)$

De modo a seleccionar o índice $i(k)$ considerem-se os seguintes resultados preliminares.

Lema 4.2.1 *Para quaisquer índices i e j pertencentes a $\mathcal{P}$, e sinais de desempenho definidos por (3.31) tem-se que*

$$\pi_i(k_a^*) \geq \pi_j(k_b^*)\,\lambda_\pi^{k_a^*-k_b^*} \implies \pi_i(k) \geq \pi_j(k) \tag{4.9}$$

para instantes de tempo k, tal que $k_a^* \leq k \leq k_b^*$

A demonstração encontra-se em apêndice (ver apêndice 4.B).

Assim, num intervalo $[k_a^*, k_b^*]$, seja p^* o índice do modelo que corresponde ao processo activo, então a linha definida por

$$f(k) = \pi_{p^*}(k_b^*)\,\lambda_\pi^{k-k_b^*} \tag{4.10}$$

funciona como uma "linha de fronteira". Ou seja, se, no intervalo $[k_a^*, k_b^*]$, um sinal de desempenho $\pi_i(k)$ passar a "linha de fronteira", não volta a passar abaixo desse limite, e de acordo com o mecanismo de comutação não volta a ser escolhido. Note-se que esta interpretação é válida apenas durante o intervalo $[k_a^*, k_b^*]$, figura 4.3.

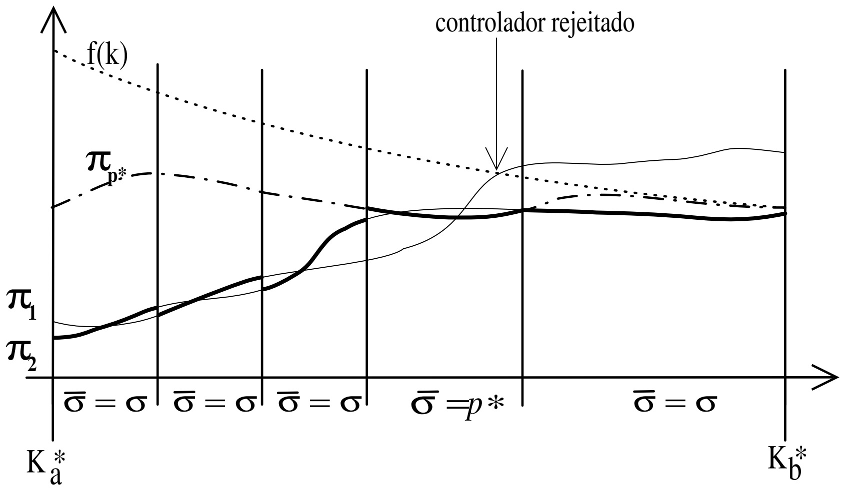

Fig. 4.3: Evolução dos sinais de desempenho $\pi_i(k)$ e da função $f(k)$.

Esta interpretação induz à escolha do índice em função dos sinais de desempenho estarem, ou não, abaixo dessa linha de fronteira.

Assim, defina-se um índice $\overline{\sigma}(k)$ de acordo com a seguinte regra. Sejam $\{k_1, k_2, k_3, ..., k_u\}$ os instantes de comutação no intervalo $[k_a^*, k_b^*]$, em que o processo é constante (p^* constante), e subdivida-se nos intervalos $[k_i, k_{i+1} - 1]$ para os quais o controlador activo está constante.

$$[k_a^*, k_b^*] = [k_0, k_1 - 1] \cup [k_1, k_2 - 1] \cup ... \cup [k_{i-1}, k_i - 1] \cup [k_i, k_{i+1} - 1] \cup ...[k_u, k_b^*] \tag{4.11}$$

Seja $\mathcal{I}$ o conjunto de todos os intervalos

$$\mathcal{I} = \{[k_0, k_1 - 1], [k_1, k_2 - 1], ..., [k_{i-1}, k_i - 1], [k_i, k_{i+1} - 1], ...[k_u, k_b^*]\} \tag{4.12}$$

Para cada intervalo $[k_{i-1}, k_i - 1] \in \mathcal{I}$, e $k \in [k_{i-1}, k_i - 1]$ defina-se

$$\overline{\sigma}(k) = \begin{cases} \sigma(k) & se \quad \pi_{\sigma(k_i)}(k_i) \leq \pi_{p^*}(k_b^*)\,\lambda^{k_i - k_b^*} \\ p^* & se \quad \pi_{\sigma(k_i)}(k_i) > \pi_{p^*}(k_b^*)\,\lambda^{k_i - k_b^*} \end{cases} \tag{4.13}$$

e para o último intervalo, $[k_u, k_b^*]$, defina-se como

$$\overline{\sigma}(k) = \begin{cases} \sigma(k) & se \quad k_b^* - k_u \geq T_D \\ p^* & se \quad k_b^* - k_u < T_D \end{cases} \tag{4.14}$$

em que $\sigma(k)$ é a saída do supervisor. Defina-se também a função auxiliar $\psi(k)$ para o intervalo $[k_a^*, k_b^*]$ tal que

$$\psi_i(k) = \begin{cases} 0 & se \quad \sigma(k) = \overline{\sigma}(k) \\ 1 & se \qquad c.c. \end{cases} \tag{4.15}$$

Assim, de acordo com a definição do sistema de comutação, tem-se que π_σ é o óptimo em cada instante de comutação. Para o sinal de desempenho $\pi_{\overline{\sigma}}$ no instante k_i, tem-se

$$\pi_{\overline{\sigma}(k_i)}(k_i) \begin{cases} \leq \pi_{p^*}(k_b^*)\,\lambda^{k_i - k_b^*} & se \quad \overline{\sigma} = \sigma \\ = \pi_{p^*}(k_b^*)\,\lambda^{k_i - k_b^*} & se \quad \overline{\sigma} = p^* \end{cases} \tag{4.16}$$

$$\pi_{\overline{\sigma}(k_i)}(k_i) \leq \pi_{p^*}(k_b^*)\,\lambda^{k_i - k_b^*} \tag{4.17}$$

Por outro lado de (4.144) tem-se que

$$\lambda_\pi^{k_i - k} \pi_{\overline{\sigma}}(k) \leq \pi_{\overline{\sigma}}(k_i) \tag{4.18}$$

então substituindo em (4.17)

$$\lambda_\pi^{k_i - k} \pi_{\overline{\sigma}}(k) \leq \pi_{\overline{\sigma}}(k_i) \leq \pi_{p^*}(k_b^*)\,\lambda^{k_i - k_b^*} \tag{4.19}$$

$$\pi_{\overline{\sigma}}(k) \leq \pi_{p^*}(k_b^*)\,\lambda^{k - k_b^*} \tag{4.20}$$

Recorde-se que para cada intervalo sendo o índice $\overline{\sigma}(k)$ constante, e aplicando o lema 4.2.1 em (4.20), se tem

$$\pi_{\overline{\sigma}}(k) \leq \pi_{p^*}(k) \tag{4.21}$$

para k pertencente a qualquer intervalo $[k_{i-1}, k_i - 1] \in \mathcal{I}$.

Para o intervalo $[k_u, k_b^*]$, se $k_b^* - k_u < T_D$ então de (4.14) tem-se

$$\pi_{\overline{\sigma}(k)}(k) = \pi_{p^*}(k)$$

se pelo contrário $k_b^* - k_u \geq T_D$, pela definição do mecanismo de comutação, significa que os sinais de desempenho estão a ser comparados e o óptimo (menor sinal) é π_σ, donde se tem

$$\pi_{\overline{\sigma}(k)}(k) \leq \pi_p(k) \;\; para \; p \in \mathcal{P}$$

e, em particular

$$\pi_{\overline{\sigma}(k)}(k) \leq \pi_{p^*}(k)$$

ou seja no intervalo $[k_u, k_b^*]$

$$\pi_{\overline{\sigma}(k)}(k) \leq \pi_{p^*}(k) \tag{4.22}$$

Assim, dado que a união do conjunto de todos os intervalos $[k_{i-1}, k_i - 1]$ com $[k_u, k_b^*]$ cobre o intervalo $[k_a^*, k_b^*]$, tem-se que

$$\pi_{\overline{\sigma}(k)}(k) \leq \pi_{p^*}(k) \;\; para \;\; k \in \;\; [k_a^*, k_b^*] \tag{4.23}$$

Heuristicamente, a escolha do índice $\overline{\sigma}$ justifica-se pela necessidade de obter um sinal para $e_{\overline{\sigma}}(k)$ que seja "bem comportado", e $\overline{\sigma}(k)$ seja "quase sempre" igual a $\sigma(k)$. Como se viu atrás, a matriz da dinâmica A_{pq} do sistema composto é estável para $p = q$. De acordo com a definição, o índice $\overline{\sigma}$ só difere de $\sigma(k)$ nos intervalos em que o sinal $\pi_{\sigma(k)}$ passa acima da linha definida por

$$f(k) = \pi_{p^*}(k_b^*)\, \lambda_\pi^{k-k_b^*} \tag{4.24}$$

Assim, se $f(k)$ funciona como "linha fronteira" para os sinais $\pi_p(k)$ que depois disso não voltam a ser escolhidos, então tal sucede no máximo um número de vezes igual ao número de modelos(ou controladores) menos um. Todos os modelos podem eventualmente ser "rejeitados" excepto o modelo que corresponde ao processo, com índice p^*. Cada um desses intervalos tem além disso uma duração máxima T_D, pois ao fim desse tempo o mecanismo de comutação escolhe um novo modelo que minimiza $\pi_i(k)$. Tem-se assim um majorante para o intervalo de tempo máximo em que $\overline{\sigma} \neq \sigma$, que será $T_D\,(n-1)$. Este resultado é formalmente derivado na secção seguinte onde constitui um passo indispensável para demonstrar a estabilidade do sistema composto.

4.3 Estabilidade do sistema composto

De forma a demonstrar a estabilidade do sistema composto $\{E, K\}$ com matriz da dinâmica $A_{\overline{\sigma}\sigma}$ (figura 4.4), torna-se necessário majorar o intervalo tempo em que $\overline{\sigma} \neq \sigma$.

Considere-se para cada modelo i o conjunto de intervalos $[k_{j-1}, k_j - 1]$, para os quais o controlador com índice i está activo ($\sigma(k) = i$).

$$\mathcal{C}_i = \{[k_{i1}, k_{i1+1} - 1] \cup [k_{i2}, k_{i2+1} - 1] \cup [k_{i3}, k_{i3+1} - 1] \cup ... \cup [k_{iu}, k_{iu+1} - 1]\} \tag{4.25}$$

tal que

$$k_{i1} < k_{i2} < k_{i3} < ... < k_{iu} \tag{4.26}$$

e

$$\mathcal{I} = \{\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 ... \cup \mathcal{C}_i \cup ... \cup \mathcal{C}_n\} \tag{4.27}$$

e defina-se uma função auxiliar $\phi_i(k)$ para $k \in \mathcal{C}_i$ tal que

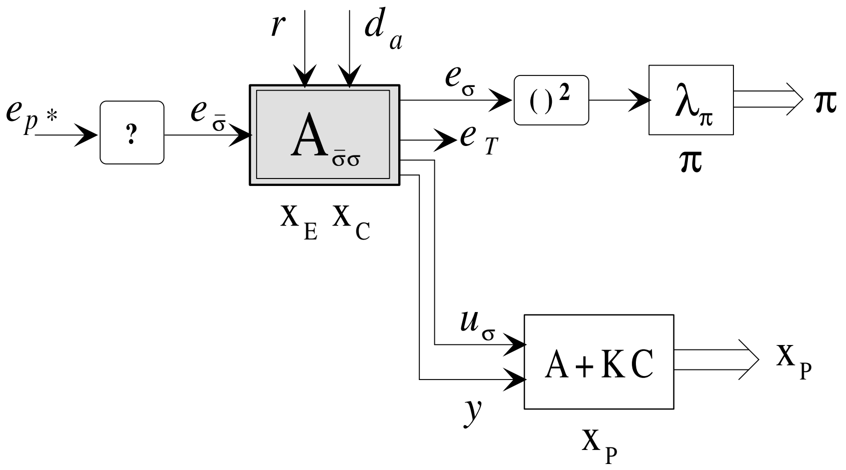

Fig. 4.4: Subsistema composto $\{E, K\}$ com matriz da dinâmica $A_{\overline{\sigma}\sigma}$

$$\phi_i(k) = \begin{cases} 0 & se \quad \sigma(k) = \overline{\sigma}(k) \\ 1 & se \qquad c.c. \end{cases} \tag{4.28}$$

Se $k \notin \mathcal{C}_i$ então

$$\phi_i(k) = 0$$

No caso particular em que $i = p^*$ como $\sigma = i = p^*$ então para qualquer k, $\overline{\sigma} = \sigma$, e

$$\phi_{p^*}(k) = 0 \tag{4.29}$$

Para qualquer outro índice note-se que todos os instantes k_{in} correspondem a instantes de comutação para os quais o sinal de desempenho $\pi_i(k_{in})$ é o mínimo. Em particular para o último instante de comutação k_{iu}, tem-se

$$\pi_i(k_{iu}) \leq \pi_{p^*}(k_{iu}) \tag{4.30}$$

para $k < k_{iu}$ e $k_{iu} < k_b^*$

$$\pi_i(k)\lambda_\pi^{k_{iu}-k} \leq \pi_i(k_{iu}) \leq \pi_{p^*}(k_{iu}) \leq \pi_{p^*}(k_b^*)\lambda_\pi^{k_{iu}-k_b^*} \tag{4.31}$$

$$\pi_i(k) \leq \pi_{p^*}(k_b^*)\lambda_\pi^{k-k_b^*} \;\; para \;\; k < k_{iu} \tag{4.32}$$

e

$$\phi_i(k) = 0 \tag{4.33}$$

da definição de $\overline{\sigma}$, em (4.13) e (4.14), tem-se que para $k < k_{iu}$ e $k \in \mathcal{C}_i$

$$\overline{\sigma}(k) = \sigma(k)$$

para o último intervalo $[k_{iu}, k_{iu+1}-1]$, que se passa a designar por$\mathcal{I}_{iu}$ é necessário considerar três situações, conforme $k_{iu+1} - k_{iu}$ seja maior, menor, ou igual a T_D

Caso A: $k_{iu+1} - k_{iu} > T_D$

Por definição do sistema de comutação, tem-se

$$\pi_i(k_{iu+1} - 1) \leq \pi_{p^*}(k_{iu+1} - 1)$$

para $k \leq k_{iu+1} - 1$ e $k_{iu+1} - 1 \leq k_b^*$ de forma análoga a (4.32), tem-se

$$\pi_i(k) \leq \pi_{p^*}(k_b^*)\lambda_\pi^{k-k_b^*} \;\; para \;\; k < k_{iu+1} - 1 \tag{4.34}$$

e

$$\phi_i(k) = 0 \tag{4.35}$$

Caso B: $k_{iu+1} - k_{iu} = T_D$

Se ocorre um comutação assim que ela é possível então isso significa que $\pi_i(k)$ não é o menor sinal de desempenho, mas não há informação se a condição que decide $\overline{\sigma}$ é ou não satisfeita, donde se tem

$$\phi_i(k) \leq 1 \tag{4.36}$$

Caso C: $k_{iu+1} - k_{iu} < T_D$

Então o intervalo em causa é o último intervalo $[k_{iu}, k_{iu+1} - 1]$ contido em $\mathcal{I}$, e ainda não decorreu o tempo de permanência T_D pelo que não é possível estabelecer uma relação entre os sinais de desempenho. De modo a incluir o caso mais pessimista a definição de $\overline{\sigma}$ e ϕ define

$$\overline{\sigma}(k) = p^*$$

$$\phi_i(k) = 1 \tag{4.37}$$

Em resumo, tem-se então a seguinte caracterização para as funções ϕ_i

$$\phi_{p^*}(k) = 0 \tag{4.38}$$

$$\phi_i(k) = 0 \ \ se \ \ k \leq k_{iu} \tag{4.39}$$

$$\phi_i(k) = 0 \ \ se \ \ k > k_{iu} \ \ e \ \ k_{iu+1} - k_{iu} > T_D \tag{4.40}$$

$$\phi_i(k) \leq 1 \ \ se \ \ k > k_{iu} \ \ e \ \ k_{iu+1} - k_{iu} \leq T_D \tag{4.41}$$

Pela definição de ψ e ϕ_i, tem-se que para cada k tal que $\psi(k) = 1$ existe um e só um i tal que $\phi_i(k) = 1$

$$\psi(k) = \phi_i(k) \quad k \in \mathcal{C}_i \tag{4.42}$$

Assim, a função ψ pode definir-se em função de ϕ_i da seguinte forma

$$\psi(k) = \sum_{i=1}^{n} \phi_i(k) \tag{4.43}$$

em que n é o número de modelos/controladores admitidos.

O majorante para o número de instantes em que $\overline{\sigma} \neq \sigma$, ou seja, em que $\psi(k) = 1$ pode calcular-se por $\sum_{k \in \mathcal{I}} \psi(k)$. Esse majorante é definido no seguinte lema, cuja demonstração é incluída em apêndice (apêndice 4.C)

Lema 4.3.1 *Seja a função ψ definida por (4.15), o conjunto de n funções ϕ_i definido por (4.28), e os n conjuntos $\mathcal{C}_i$ definidos de acordo com (4.25), então*

$$\sum_{k \in \mathcal{I}} \psi(k) \ \leq \ T_D \, (n-1) \tag{4.44}$$

Considere-se o seguinte lema sobre estabilidade de sistemas perturbados [67].

Lema 4.3.2 *Dada uma equação de estado de um sistema linear (eventualmente variável no tempo), uniformemente exponencialmente estável*

$$x(k+1) = A(k)x(k) \tag{4.45}$$

então o sistema linear descrito pela equação de estado

$$x(k+1) = (A(k) + B(k))x(k) \tag{4.46}$$

é uniformemente exponencialmente estável se existe uma constante β finita tal que para qualquer k_0

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} \|B(k)\| \leq \beta \tag{4.47}$$

O seguinte lema é uma consequência directa do anterior pela aplicação do lema de Bellman-Gronwall (apêndice 4.D).

Lema 4.3.3 *Seja o sistema linear com matriz da dinâmica $A(k)$ e o sistema linear perturbado com matriz da dinâmica $A(k) + B(k)$ nas condições do lema 4.3.2. Então as matrizes de transição dos sistemas verificam*

$$\|\Phi_A(k, k_0)\| \leq \gamma \lambda_A^{k-k_0} \tag{4.48}$$

$$\|\Phi_{A+B}(k, k_0)\| \leq \gamma e^{\gamma\beta} \lambda_A^{k-k_0} \tag{4.49}$$

em que

$$\beta = \sum_{k=k_0}^{\infty} \|B(k)\| \tag{4.50}$$

Partindo da identidade

$$A_{\overline{\sigma}\sigma} = \psi A_{\overline{\sigma}\sigma} + (1 - \psi) A_{\overline{\sigma}\sigma} \tag{4.51}$$

a matriz da dinâmica do sistema composto $A_{\overline{\sigma}\sigma}$, e de acordo com a definição (4.15) da função ψ, pode representar-se por

$$A_{\overline{\sigma}\sigma} = \psi A_{p^*\sigma} + (1 - \psi) A_{\sigma\sigma} \tag{4.52}$$

donde se obtém,

$$A_{\overline{\sigma}\sigma} = A_{\sigma\sigma} + \psi(A_{p^*\sigma} - A_{\sigma\sigma}) \tag{4.53}$$

Dado que,

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} \|\psi(A_{p^*\sigma} - A_{\sigma\sigma})\| \leq \sum_{k=k_0}^{\infty} |\psi| \, \|(A_{p^*\sigma} - A_{\sigma\sigma})\| \tag{4.54}$$

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} \|\psi(A_{p^*\sigma} - A_{\sigma\sigma})\| \leq max \|(A_{p^*\sigma} - A_{\sigma\sigma})\| \sum_{k=k_0}^{\infty} |\psi| \tag{4.55}$$

aplicando o lema 4.3.1 tem-se

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} \|\psi(A_{p^*\sigma} - A_{\sigma\sigma})\| \leq max \|(A_{p^*\sigma} - A_{\sigma\sigma})\| \, (n-1) T_D \tag{4.56}$$

Uma vez que são tudo quantidades finitas pode aplicar-se o lema 4.3.2 e 4.3.3 ao sistema composto, donde se conclui que para p^* constante, este é uniformemente exponencialmente estável, com valores próprios no círculo de raio λ_{CECL}

$$\lambda_{CECL} > max\{\lambda_C, \lambda_E, \lambda_{CL}\} \tag{4.57}$$

Deste modo é possível aplicar ao sistema resultante (para p^* constante) o teorema 2.2.4. Assim, considerando o índice p^* variável em instantes de tempo espaçados, pelo teorema 2.2.4 conclui-se que existe um tempo de permanência para o processo variável no tempo, associado a esse índice, tal que garante um sistema composto uniformemente exponencialmente estável.

No entanto para além das entradas r e d_a o sistema composto tem como entrada o sinal $e_{\overline{\sigma}}$. É deste modo necessário limitar o comportamento desse sinal. Sob a hipótese de modelação perfeita o sinal e_{p^*} decai exponencialmente para zero como se viu atrás. Assim uma forma de limitar o sinal $e_{\overline{\sigma}}$ é relacionando-o com e_{p^*}.

4.4 Relação entre $e_{\overline{\sigma}}$ e e_{p^*}

De forma a determinar a relação entre $e_{\overline{\sigma}}$ e e_{p^*} (figura 4.5) considere-se que o instante actual é o limite superior de um intervalo $[\,k_a^* \;\, k_b^*]$.

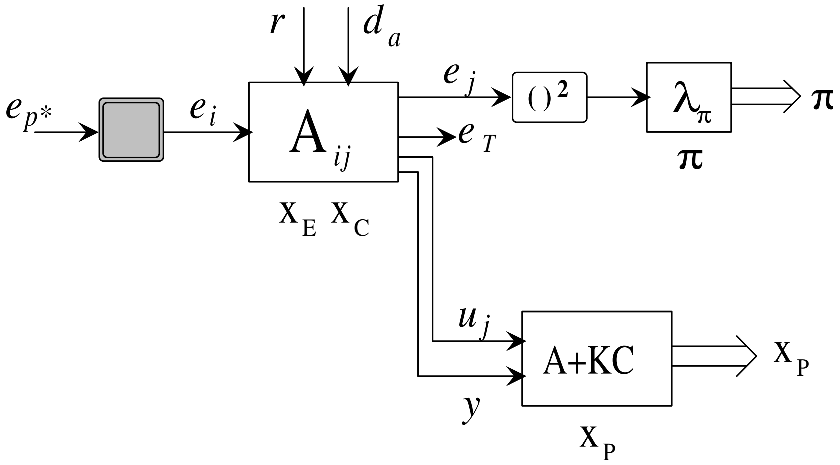

Fig. 4.5: Relação entre $e_{\overline{\sigma}}$ e e_{p^*}.

De acordo com a definição do sinal $\overline{\sigma}$, tem-se

$$\pi_{\overline{\sigma}(k_b^*)}(k_b^*) \leq \pi_{p^*}(k_b^*) \tag{4.58}$$

$$\pi_{\overline{\sigma}(k_b^*)}(k_b^*) \leq \pi_{p^*}(k_a^*)\lambda_\pi^{k_b^*-k_a^*} + \sum_{j=k_a^*}^{k_b^*-1} \lambda_\pi^{k_b^*-j-1}\, e_{p^*}^2(j) \tag{4.59}$$

Como se viu na secção 3.1 o erro de predição do modelo correcto e_{p^*} decai exponencialmente para zero

$$|e_{p^*}(k)| \leq \lambda_{\omega E}^{k-k_a^*}\, \|[x'_E(k_a^*), x'_P(k_a^*)]'\|\, C \tag{4.60}$$

$$|e_{p^*}(k)|^2 \leq (\lambda_{\omega E}^2)^{k-k_a^*}\, \|[x'_E(k_a^*), x'_P(k_a^*)]'\|^2\, C^2 \tag{4.61}$$

Ou seja trata-se de um sistema exponencialmente estável com um sinal de entrada que cai exponencialmente para zero. Aplicando o lema (2.3.4)

$$\pi_{\overline{\sigma}(k_b^*)}(k_b^*) \leq \lambda_\pi^{k_b^*-k_a^*}\pi_{p^*}(k_a^*) + \lambda_{\pi\omega E}^{k_b^*-k_a^*} C\|[x'_E(k_a^*), x'_P(k_a^*)]'\|^2 \tag{4.62}$$

em que

$$\lambda_{\pi\omega E} > max(\lambda_\pi, \lambda_\omega^2, \lambda_E^2) \tag{4.63}$$

Por definição dos sinais de desempenho

$$|e_i(k)|^2 \leq \pi_i(k) \tag{4.64}$$

então

$$|e_{\overline{\sigma}(k_b^*)}(k_b^*)|^2 \leq \pi_{\overline{\sigma}(k_b^*)}(k_b^*) \leq \lambda_\pi^{k_b^*-k_a^*}\pi_{p^*}(k_a^*) + \lambda_{\pi\omega E}^{k_b^*-k_a^*} C\|[x'_E(k_a^*), x'_P(k_a^*)]'\|^2 \tag{4.65}$$

redefinindo as constantes, tem-se

$$|e_{\overline{\sigma}(k_b^*)}(k_b^*)| \leq \lambda_{\pi\omega E}^{\frac{1}{2}(k_b^*-k_a^*)}\{\,\gamma_{\sigma 1}\,\|\pi^{\frac{1}{2}}(k_a^*)\| + \,\gamma_{\sigma 2}\,\|x_E(k_a^*)\| + \,\gamma_{\sigma 3}\,\|x_P(k_a^*)\|\} \tag{4.66}$$

Assim tem-se que para um intervalo $[k_a^*, k_b^*]$ com o processo constante, $|e_{\overline{\sigma}(k_b^*)}(k_b^*)|$ decai exponencialmente para zero. Se $|r|$ e $|d_a|$ são limitados, como o sistema definido por $A_{\overline{\sigma}\sigma}$ é exponencialmente uniformemente estável, então, $\|x_E\|$ e $\|x_C\|$ são limitados e $|e_i|$,$|e_T|$,$|y|$, e u_σ são limitados. Devido à detectabilidade de P, então $\|x_P\|$ é limitado. Como $|e_i|$ é limitado então $|\pi|$ é limitado, e o estado composto $x = [x'_E, x'_C, x'_P, \pi']'$ é limitado.

Note-se ainda que, com o processo constante as conclusões do capítulo 3 são válidas, pelo que impondo um efeito integral na realimentação, se r e d_a forem constantes a saída y tende para a referência r, e o erro de seguimento e_T tende para zero.

4.5 Estabilidade do sistema global com processos variáveis

De modo a demonstrar a estabilidade do sistema global com o processo variável no tempo através do teorema 2.2.4 torna-se necessário demonstrar que o sistema global com o estado $x = [x'_E, x'_C, x'_P, \pi']'$ é uniformemente exponencialmente estável.

Assim, considere-se o sistema composto $[x'_E, x'_C]'$ com entradas d_a e r limitadas

$$|d_a(k)| \leq \overline{d_a} \tag{4.67}$$

$$|r(k)| \leq \overline{r} \tag{4.68}$$

e $e_{\overline{\sigma}}$ dado por (4.66). Aplicando o lema anterior (2.3.1), e o lema (2.3.4) aplicáveis a sistemas exponencialmente estáveis com entradas limitadas e exponencialmente decrescentes, obtém-se

$$\|[x'_E(k), x'_C(k)]'\| \leq \lambda_{CECL}^{k-k_0}\,\gamma_{EC1}\,\|[x'_E(k_0), x'_C(k_0)]'\| + \\ \lambda_{\pi\omega CECL}^{k-k_0}\,\gamma_{EC2}\,[\|x_E(k_0)\|, \|x_P(k_0)\|, \|\pi(k_0)\|^{\frac{1}{2}}]' + \gamma_{EC3}\,[\overline{d_a}, \overline{r}]' \tag{4.69}$$

onde

$$\lambda_{CECL} > max(\lambda_C, \lambda_E, \lambda_{CL}) \tag{4.70}$$

e

$$\lambda_{\pi\omega CECL} > max(\lambda_\pi^{\frac{1}{2}}, \lambda_\omega, \lambda_C, \lambda_E, \lambda_{CL}) \tag{4.71}$$

ou seja

$$\|[x'_E(k), x'_C(k)]'\| \leq \lambda_{\pi\omega CECL}^{k-k_0}\,\gamma_{EC}\,[\|\ x_E(k_0)\|, \|x_C(k_0)\|, \|x_P(k_0)\|, \|\pi(k_0)\|^{\frac{1}{2}}]' + \zeta_{EC}[\overline{d_a}, \overline{r}]' \tag{4.72}$$

mas

$$\|x'_E(k)\| \leq \|[x'_E(k), x'_C(k)]'\| \tag{4.73}$$

e

$$\|x'_C(k)\| \leq \|[x'_E(k), x'_C(k)]'\| \tag{4.74}$$

donde se tem

$$\|[x'_E(k)]'\| \leq \lambda_{\pi\omega CECL}^{k-k_0}\,\gamma_{EC}\,[\|\ x_E(k_0)\|, \|x_C(k_0)\|, \|x_P(k_0)\|, \|\pi(k_0)\|^{\frac{1}{2}}]' + \zeta_{EC}[\overline{d_a}, \overline{r}]' \tag{4.75}$$

$$\|[x'_C(k)]'\| \leq \lambda_{\pi\omega CECL}^{k-k_0}\,\gamma_{EC}\,[\|\ x_E(k_0)\|, \|x_C(k_0)\|, \|x_P(k_0)\|, \|\pi(k_0)\|^{\frac{1}{2}}]' + \zeta_{EC}[\overline{d_a}, \overline{r}]' \tag{4.76}$$

Considere-se o sistema (4.8) de entradas u e y e saída $x_P(k)$. Os sinais u e y são função do sistema composto $[x'_E, x'_C]'$, de (4.72) e aplicando o lema 2.3.4, tem-se

$$\|x_P(k)\| \leq \lambda_\omega^{k-k_0}\,\gamma_{P1}\,\|x_P(k_0)\| + \\ \lambda_{\pi\omega CECL}^{k-k_0}\,\gamma_{P2}\,[\|\ x_E(k_0)\|, \|x_C(k_0)\|, \|x_P(k_0)\|, \|\pi(k_0)\|^{\frac{1}{2}}]' + \\ \gamma_{P3}\,[\overline{d_a}, \overline{r}]' \tag{4.77}$$

$$\|x_P(k)\| \leq \lambda_{\pi\omega CECL}^{k-k_0}\,\gamma_P\,[\|\ x_E(k_0)\|, \|x_C(k_0)\|, \|x_P(k_0)\|, \|\pi(k_0)\|^{\frac{1}{2}}]' + \zeta_P\,[\overline{d_a}, \overline{r}]' \tag{4.78}$$

Para o vector π dos sinais de desempenho tem-se um sistema exponencialmente estável com sinais de entrada $e_i^2(k)$. Dado que e_i é função do estado do sistema composto $[x'_C, x'_E]'$,tem-se

$$\|\pi(k)\| \leq \lambda_\pi^{k-k_0}\,\gamma_{\pi 1}\,\|\pi(k_0)\| + \gamma_{\pi 2}\,\|[x'_E(k_0), x'_C(k_0)]\|^2 \tag{4.79}$$

e tendo em conta que $|a| \leq |b| + |c|$ implica que $\sqrt{|a|} \leq \sqrt{|b|} + \sqrt{|c|}$, então

$$\|\pi(k)\|^{\frac{1}{2}} \leq \lambda_{\pi}^{\frac{1}{2}(k-k_0)}\, \gamma_{\pi 1}^{\frac{1}{2}}\, \|\pi(k_0)\|^{\frac{1}{2}} + \gamma_{\pi 2}^{\frac{1}{2}}\, \|[x'_E(k_0), x'_C(k_0)]\| \tag{4.80}$$

aplicando novamente o lema (2.3.4), tem-se

$$\begin{aligned} \|\pi(k)\|^{\frac{1}{2}} \leq\; & \lambda_{\pi}^{\frac{1}{2}(k-k_0)}\, \gamma'_{\pi 1}\, \|\pi(k_0)\| + \\ & \lambda_{\pi\omega CECL}^{k-k_0}\, \gamma'_{\pi 2}\, [\|\, x_E(k_0)\|, \|x_C(k_0)\|, \|x_P(k_0)\|, \|\pi\|^{\frac{1}{2}}]' + \\ & \gamma'_{\pi 3}\, [\overline{d_a}, \overline{r}]' \end{aligned} \tag{4.81}$$

$$\|\pi(k)\|^{\frac{1}{2}} \leq \lambda_{\pi\omega CECL}^{k-k_0}\, \gamma_{\pi}\, [\|\, x_E(k_0)\|, \|x_C(k_0)\|, \|x_P(k_0)\|, \|\pi\|^{\frac{1}{2}}]' + \zeta_{\pi}[\overline{d_a}, \overline{r}]' \tag{4.82}$$

definindo

$$x(k) = [\|x_e(k)\|, \|x_c(k)\|, \|x_p(k)\|, \|\pi(k)\|^{\frac{1}{2}}]' \tag{4.83}$$

as equações (4.75),(4.76),(4.78) e (4.82) podem apresentar-se da seguinte forma

$$\begin{aligned} \|x_E(k)\| &\leq \lambda_{\pi\omega CECL}^{k-k_0}\, \gamma_{EC}\, x(k_0) + \zeta_{EC}\, [\overline{d_a}, \overline{r}]' \\ \|x_C(k)\| &\leq \lambda_{\pi\omega CECL}^{k-k_0}\, \gamma_{EC}\, x(k_0) + \zeta_{EC}\, [\overline{d_a}, \overline{r}]' \\ \|x_P(k)\| &\leq \lambda_{\pi\omega CECL}^{k-k_0}\, \gamma_{P}\, x(k_0) + \zeta_{P}\, [\overline{d_a}, \overline{r}]' \\ \|\pi(k)\|^{\frac{1}{2}} &\leq \lambda_{\pi\omega CECL}^{k-k_0}\, \gamma_{\pi}\, x(k_0) + \zeta_{\pi}\, [\overline{d_a}, \overline{r}]' \end{aligned} \tag{4.84}$$

definindo

$$\Gamma = [\, \gamma_{EC}\ \gamma_{EC}\ \gamma_P\ \gamma_{\pi}\,] \tag{4.85}$$

e

$$\zeta = [\, \zeta_{EC}\ \zeta_{EC}\ \zeta_P\ \zeta_{\pi}\,] \tag{4.86}$$

tem-se

$$x(k) \leq \lambda_{\pi\omega CECL}^{k-k_0}\, \Gamma\, x(k_0) \;+\; \zeta\, [\overline{d_a}, \overline{r}]' \tag{4.87}$$

$$\|x(k)\| \leq \lambda_{\pi\omega CECL}^{k-k_0}\, \|\Gamma\|\, \|x(k_0)\| \;+\; \|\zeta\|\, \|[\overline{d_a}, \overline{r}]'\| \tag{4.88}$$

com

$$\lambda_{\pi\omega CECL} > max(\lambda_{\pi}^{\frac{1}{2}}, \lambda_{\omega}, \lambda_C, \lambda_E, \lambda_{CL}) \tag{4.89}$$

Quando $\|x(k)\|$ tende para zero o estado composto $[x'_E\, x'_C\, x'_P\, \pi']'$ também tende para zero. Assim, de acordo com a definição 2.2.1 pode-se concluir que o sistema composto pelo controlador K, estimador E, processo P e avaliador de desempenho D é uniformemente exponencialmente estável em cada processo p^* constante num intervalo $[k_a^*, k_b^*]$. Aplicando o teorema 2.2.4, conclui-se que existe um tempo de permanência T_{Dp} do processo, que garante a estabilidade exponencial uniforme do sistema global. Tem-se ainda que, com referência e perturbação acessível limitadas, o estado mantém-se limitado.

Este resultado é sumarizado no seguinte teorema.

Teorema 4.5.1 *Considere-se a interconexão de um processo P, descrito como a comutação entre modelos lineares invariantes no tempo com valores próprios dos modos não observáveis ou não controláveis menores que λ_ω, eq. (4.1), pertencente a uma família de processos de ordem majorada; de um multi-estimador E com valores próprios menores que λ_E e que verifica a hipótese de modelação perfeita, eq. (4.2-4.3); de um multi-controlador K com valores próprios menores que λ_C e tal que a cadeia fechada do controlador com índice i com o modelo de índice i resulta num sistema com valores próprios menores que λ_{CL}, eq. (4.4); de um gerador de sinais de desempenho D com valores próprios λ_π, eq. (4.5); e de um mecanismo de comutação S com a imposição de um tempo de permanência T_D, fig. 3.8. Então, existe um T_{Dp} finito tal que, se o processo P é um sistema linear com tempo de permanência T_{Dp}, então o sistema composto $\{E, K, P, \Pi\}$ é uniformemente exponencialmente estável com decaimento $\lambda_{\pi\omega CECL}$,*

$$\lambda_{\pi\omega CECL} > max(\lambda_\pi^{\frac{1}{2}}, \lambda_\omega, \lambda_C, \lambda_E, \lambda_{CL}) \tag{4.90}$$

4.6 Exemplos de simulação

Nesta secção apresentam-se resultados de simulação que ilustram o controlo comutado aplicado a sistemas variáveis no tempo.

Exemplo 4.1 Considere-se um processo linear (variável no tempo) modelado por um sistema de primeira ordem

$$\begin{aligned} x_P(k+1) &= a_P(k)x_P(k) + b_P(k)u_P(k) \\ y_P(k) &= c_P(k)x_P(k) \end{aligned} \tag{4.91}$$

e um controlador também de primeira ordem

$$\begin{aligned} x_K(k+1) &= a_K(k)x_K(k) + b_K(k)u_K(k) \\ y_K(k) &= c_K(k)x_K(k) \end{aligned} \tag{4.92}$$

O processo é definido pelos valores dos parâmetros $\{a_P, b_P, c_P\}$, os quais comutam espaçadamente entre

$$\{a_{P1}, b_{P1}, c_{P1}\} = \{0.75, 0.44, 2\} \tag{4.93}$$

e

$$\{a_{P2}, b_{P2}, c_{P2}\} = \{1.17, 0.44, 0.44\} \tag{4.94}$$

Ou seja, o processo é um sistema linear variável no tempo, representado pela comutação entre dois SLITs com as seguintes funções de transferência

$$P_1(q) = \frac{B_1(q)}{A_1(q)} = \frac{0.88}{q - 0.75} \qquad (4.95)$$

e

$$P_2(q) = \frac{B_2(q)}{A_2(q)} = \frac{0.1936}{q - 1.17} \qquad (4.96)$$

Para cada modelo do processo P_i considere-se um controlador K_i *ad hoc* que coloca os pólos da interligação $\{K_i, P_i\}$, da cadeia fechada, em (fig.4.6)

$$\lambda_{CL} = 0.95 \pm i0.22 \qquad (4.97)$$

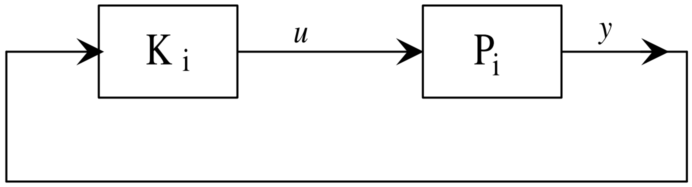

Fig. 4.6: Modelo do processo P_i e controlador K_i em cadeia fechada.

Assim, considerem-se os seguintes controladores de primeira ordem

$$K_1(q) = \frac{0.11}{q - 1.17} \qquad (4.98)$$

$$K_2(q) = \frac{0.5}{q - 0.75} \qquad (4.99)$$

os quais admitem a seguinte representação em espaço de estados

$$\begin{aligned} x_{K1}(k+1) &= 1.17x_{K1}(k) + 0.11(k)u_P(k) \\ u(k) &= 1.0x_{K1}(k) \end{aligned} \qquad (4.100)$$

e

$$\begin{aligned} x_{K2}(k+1) &= 0.75x_{K2}(k) + 0.5(k)u_P(k) \\ u(k) &= 1.0x_{K2}(k) \end{aligned} \qquad (4.101)$$

Facilmente se observa que a realimentação de dois SLITs de primeira ordem (K e P) em série, resulta no seguinte sistema homogéneo

$$\begin{bmatrix} x_K(k+1) \\ x_P(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_K & b_K c_P \\ b_P c_K & a_P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_K(k) \\ x_P(k) \end{bmatrix} \qquad (4.102)$$

onde $\{a_K, b_K, c_K\}$ e $\{a_P, b_P, c_P\}$ são, respectivamente, os parâmetros da equação de estado do controlador e do processo, de acordo com (4.91) e (4.92).

Admita-se que existe um supervisor imaginário ideal que detecta a mudança do processo instantaneamente. Então, a interligação $\{K, P\}$ é um processo linear variável no tempo que comuta entre $\{K_1, P_1\}$ e $\{K_2, P_2\}$. Substituindo os valores dos parâmetros do processo (4.93), (4.94), e os parâmetros dos controladores (4.100) e (4.101) obtém-se para $\{K_1, P_1\}$, o seguinte sistema homogéneo

$$\begin{bmatrix} x_K(k+1) \\ x_P(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.17 & -0.22 \\ 0.44 & 0.75 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_K(k) \\ x_P(k) \end{bmatrix} \tag{4.103}$$

e, para $\{K_2, P_2\}$ obtém-se

$$\begin{bmatrix} x_K(k+1) \\ x_P(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.75 & -0.22 \\ 0.44 & 1.17 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_K(k) \\ x_P(k) \end{bmatrix} \tag{4.104}$$

Note-se que as matrizes da dinâmica dos dois sistemas homogéneos em (4.103) e (4.104) coincidem com as matrizes do exemplo 2.2. Podem assim aplicar-se a este sistema em cadeia fechada a mesmas conclusões obtidas no exemplo 2.2 para sistemas lineares. As figuras 4.7 e 4.8 (que repetem o resultado do capítulo 2) representam a evolução do estado da interligação $\{K, P\}$ considerando um processo (e o correspondente controlador) que comutam a cada 10 e a cada 40 instantes de amostragem, respectivamente. Ou seja,

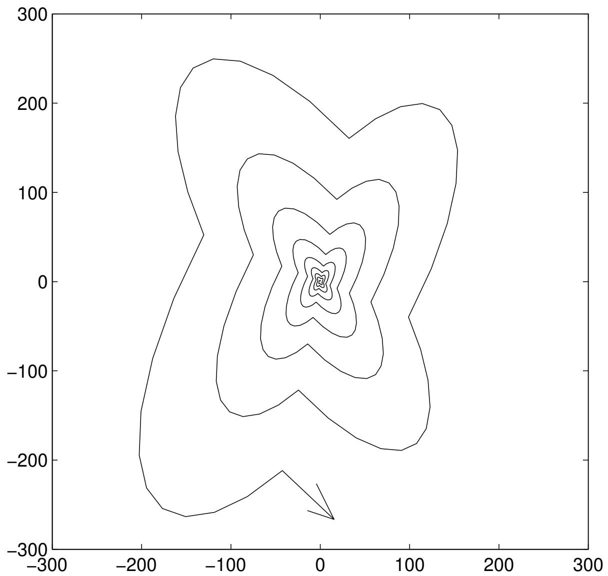

Fig. 4.7: Trajectória do estado com T_{Dp}=10.

mesmo considerando um supervisor "perfeito", no sentido que detecta acertadamente e instantaneamente o modelo correspondente ao processo, a estabilidade do processo controlado não pode ser garantida se o processo variar mais rapidamente que um certo limite.

Note-se que o valor limite de T_{Dp} encontrado para o exemplo 2.2 ($T_{Dp} > 38.168$) só é valido considerando um supervisor "perfeito", pelo tem de ser considerado apenas como um minorante para o valor de T_{Dp} que garante a estabilidade do processo com controlo comutado.

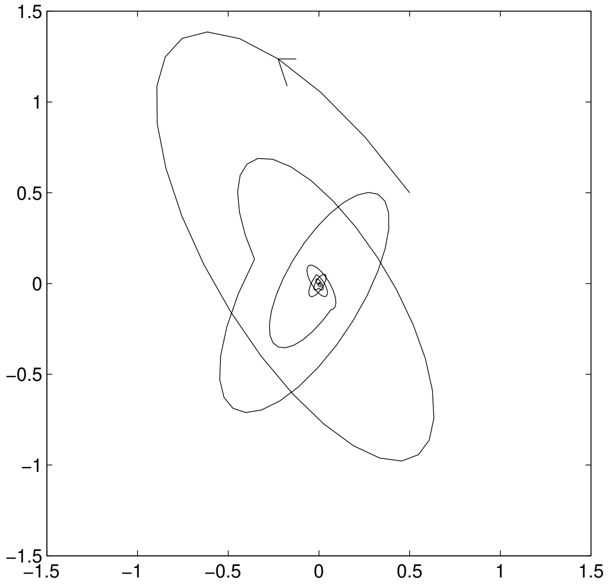

Fig. 4.8: Trajectória do estado com T_{Dp}=40.

Mostram-se a seguir resultados do processo controlado com o supervisor baseado em múltiplos modelos com tempo de permanência $T_D = 10$, em que se utilizaram os seguintes parâmetros: $\lambda_\pi = 0.99$, a referência é constante $r = 1$, e o processo comuta entre os dois sistemas em intervalos de cerca de 1000 amostras. Note-se que as combinações $\{K_i, P_j\}$ "erradas" conduzem a sistemas em cadeia fechada instáveis. Designando por λ_{ij} a norma dos valores próprios em cadeia fechada de $\{K_i, P_j\}$, tem-se

$$\lambda_{12} = 1.0012$$

$$\lambda_{21} = 1.1791$$

Observa-se que após um pequeno atraso, o supervisor comuta para o controlador correspondente ao modelo correcto.

Na figura 4.10 mostram-se os dois sinais de desempenho dos modelos preditivos. Observa-se que os sinais permanecem majorados, apesar dos fortes transitórios a seguir a cada transição. Tal como previsto, observa-se o decaimento exponencial do sinal de desempenho que corresponde ao modelo correcto.

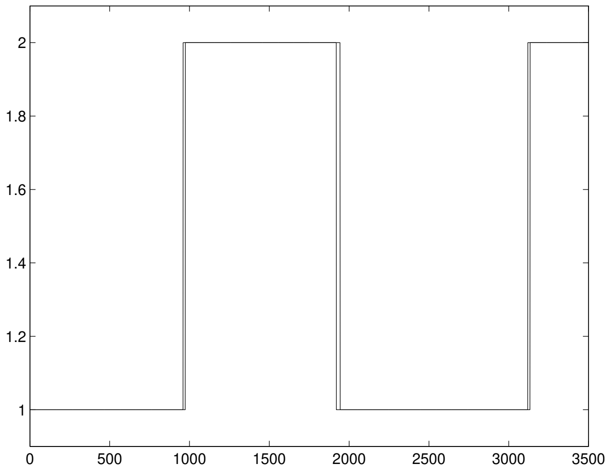

Fig. 4.9: Processo activo $p^*(k)$ e saída do supervisor σ(k)

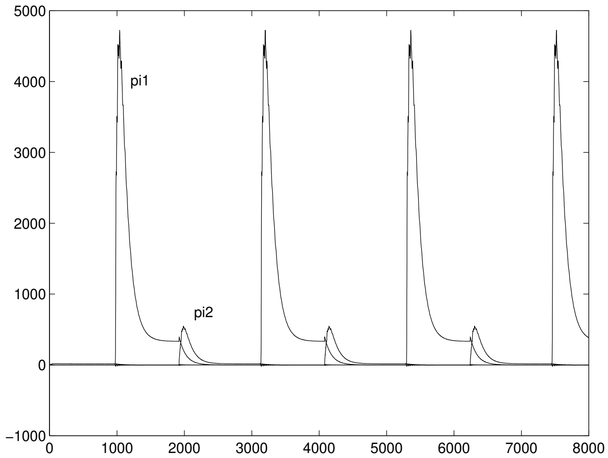

Fig. 4.10: Sinais de desempenho $\pi_1(k)$ e $\pi_2(k)$

A figura 4.11 representa a evolução do estado, na qual se podem observar:

- As trajectórias correspondentes às combinações "correctas" $\{K_i, P_i\}$ (trajectórias elípticas)

- Os dois pontos de equilíbrio distintos devido à referência ser não nula.

- A trajectória do estado quando está activa a combinação $\{K_1, P_2\}$, (trajectória aproximadamente circular).

Na figura 4.12 o logaritmo dos sinais de desempenho permite confirmar o decaimento exponencial quando corresponde ao modelo certo (período de decaimento linear no gráfico logarítmico).

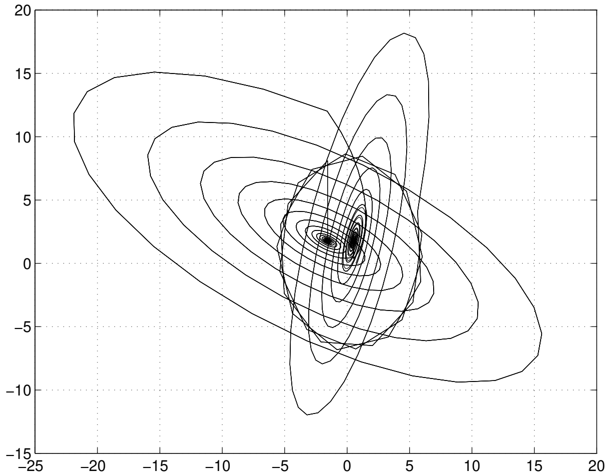

Fig. 4.11: Diagrama representativo do estado, com a saída y e o sinal de controlo u.

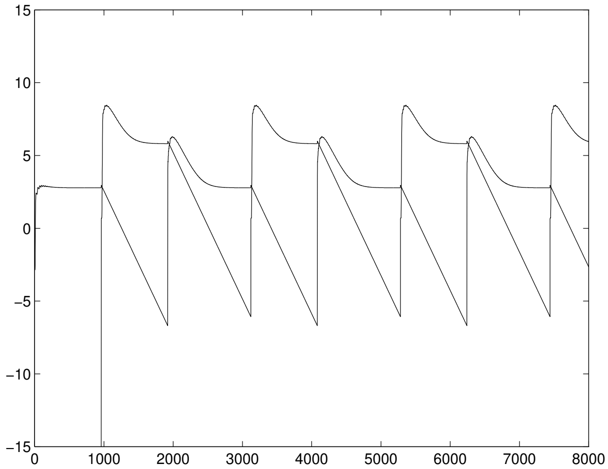

Fig. 4.12: Logaritmo dos sinais de desempenho $log(\pi_i)$.

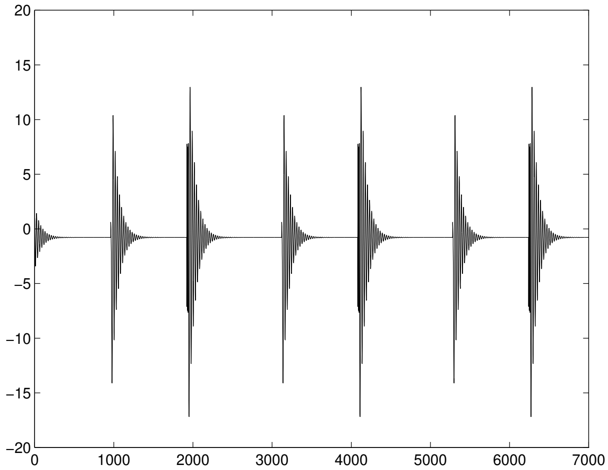

Fig. 4.13: Erro de seguimento do sistema controlado.

Finalmente na figura 4.13 representa-se o erro de seguimento, o qual é majorado.

Os resultados com introdução de ruído de excitação com potência $\eta^2 = 10^{-3}$ mostra-se nas figuras 4.14 e 4.15

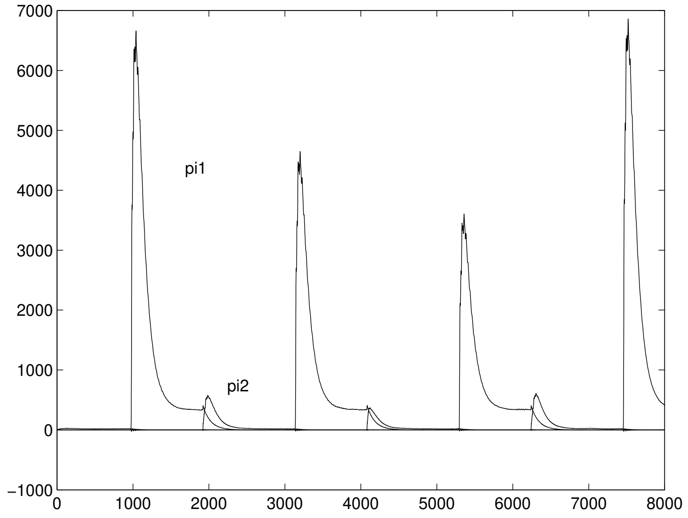

Fig. 4.14: Sinais de desempenho do supervisor, com introdução de ruído de excitação,$\eta^2 = 10^{-3}$

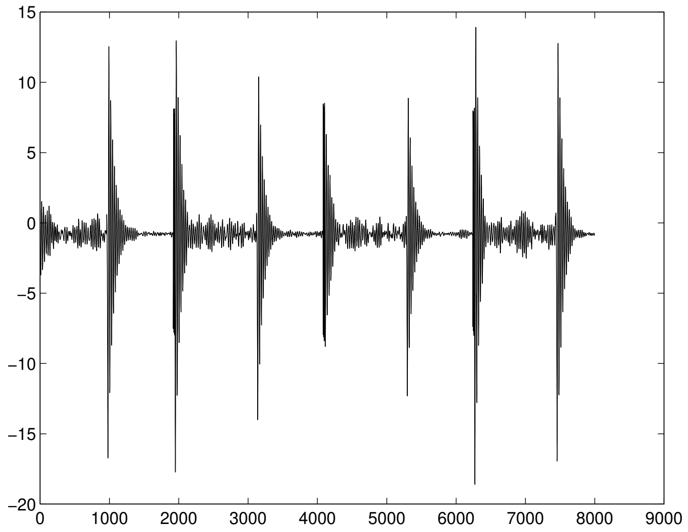

Fig. 4.15: Erro de seguimento do sistema controlado, com introdução de ruído de excitação,$\eta^2 = 10^{-3}$

Exemplo 4.2

Neste exemplo considera-se o modelo de um carro duplo acoplado por uma mola de rigidez variável, figura 4.16, [17]. O problema de controlo tem como objectivo controlar a posição do carro 2, aplicando uma força no carro 1.

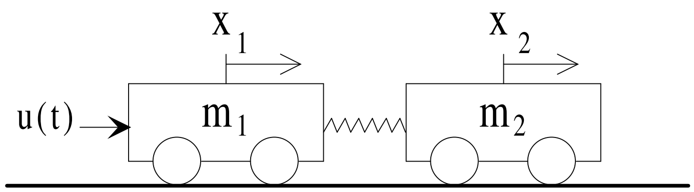

Fig. 4.16: Processo - carro duplo acoplado com rigidez variável

O modelo contínuo deste processo é dado por,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \ddot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{-\gamma}{m_1} & 0 & \frac{\gamma}{m_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-\gamma}{m_2} & 0 & \frac{\gamma}{m_2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \dot{x}_1 \\ x_2 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \tag{4.105}$$

com saída

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \dot{x}_1 \\ x_2 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} \tag{4.106}$$

e admite-se que as massas são unitárias, $m_1 = m_2 = 1$.

Nas simulações abaixo consideram-se os controladores definidos em [51], que foram calculados usando o método H_∞ da sensitividade mista ponderada [29]. A discretização dos modelos $\frac{B_i}{A_i}$ e dos controladores $\frac{S_i}{R_i}$ foi efectuada considerando um circuito ZOH (*zero order hold*) ideal, com um tempo de amostragem $T_s = 0.1\,s$. Os polinómios resultantes dos modelos e dos controladores definidos no operador avanço q são:

$$A_1(q) = q^4 - 3.994q^3 + 5.988q^2 - 3.994q + 1 \tag{4.107}$$

$$B_1(q) = 1.25\,10^{-6}q^3 + 1.374\,10^{-5}q^2 + 1.374\,10^{-5}q + 1.25\,10^{-6} \tag{4.108}$$

$$A_2(q) = q^4 - 3.98q^3 + 5.96q^2 - 3.98q + 1 \tag{4.109}$$

$$B_2(q) = 4.164\,10^{-6}q^3 + 4.575\,10^{-5}q^2 + 4.575\,10^{-5}q + 4.164\,10^{-6} \tag{4.110}$$

$$R_1(q) = q^3 - 2.433q^2 + 1.991q - 0.545 \tag{4.111}$$

$$S_1(q) = 24.110q^3 - 72.009q^2 + 71.801q - 23.90 \tag{4.112}$$

$$R_2(q) = q^3 - 2.3203q^2 + 1.8282q - 0.4842 \tag{4.113}$$

$$S_2(q) = 13.359q^3 - 40.627q^2 + 41.389q - 14.116 \tag{4.114}$$

O modelo 1 corresponde a um processo com a rigidez $\gamma_1 = 0.3$ e o modelo 2 corresponde a $\gamma_2 = 1.0$

Nas figuras seguintes observam-se os resultados de simulação do processo em cadeia fechada com supervisor, admitindo $\lambda_\pi = 0.99$, tempo de permanência $T_D = 10$, e considera-se que o processo comuta entre o modelo 1 e 2 a cada 800 intervalos de amostragem. Adicionou-se ao sinal de controlo ruído de excitação com potência $\eta^2 = 10^{-9}$.

O módulo máximo dos valores próprios em cadeia fechada λ_{km}, em que k e m são os índices associados ao controlador e modelo, respectivamente, é dado por

$$\lambda_{11} = 0.9854 \quad \lambda_{22} = 0.9511 \quad \lambda_{12} = 1.0257 \quad \lambda_{21} = 1.0172 \tag{4.115}$$

ou seja, a cadeia fechada de cada processo com o controlador "errado" é instável.

Na figura 4.17 observa-se o sinal de controlo $u(k)$, a referência $r(k)$ com um valor constante $r = 1$, e a saída do processo $y(k)$. Note-se que devido ao integrador que existe intrinsecamente no processo o sinal de controlo $u(k)$ de equilíbrio é $u_{eq} = 0$. Deste modo, a comutação do processo entre modelos não afecta u_{eq}, o que justifica a inexistência de fortes transitórios após cada comutação.

O índice do modelo do processo activo e a decisão do supervisor σ mostram-se na figura 4.18, observando-se que o atraso entre a comutação do processo e a decisão do controlador permanece limitado, variando entre 3 e 6 segundos.

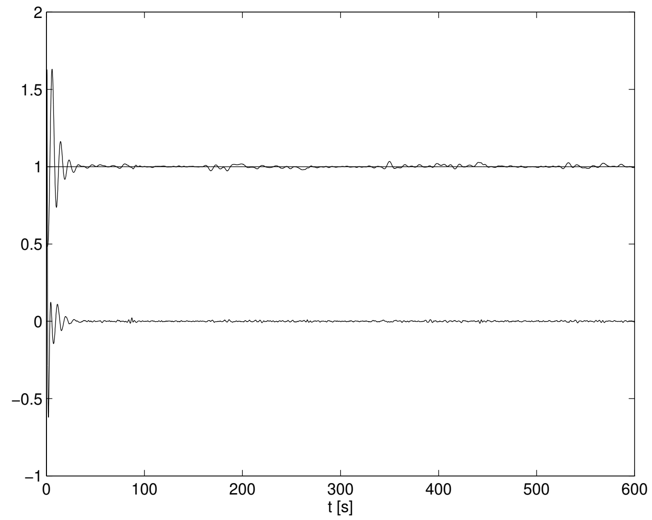

Fig. 4.17: Referência $r = 1$, variável manipulada u, e saída do processo y.

Na figura 4.19 observa-se o logaritmo dos sinais de desempenho, observando-se que em cada instante o modelo preditivo que corresponde ao modelo correcto exibe um erro de estimação que decai exponencialmente para zero (decrescimento linear na escala logarítmica).

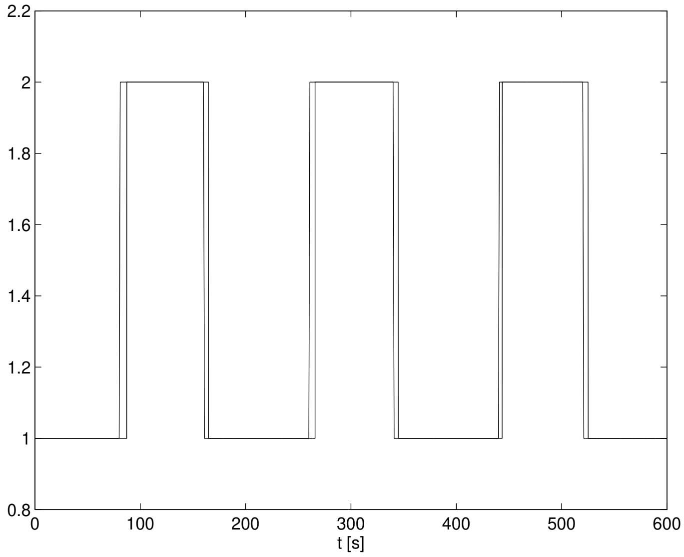

Fig. 4.18: Índice do modelo do processo activo e decisão do supervisor σ

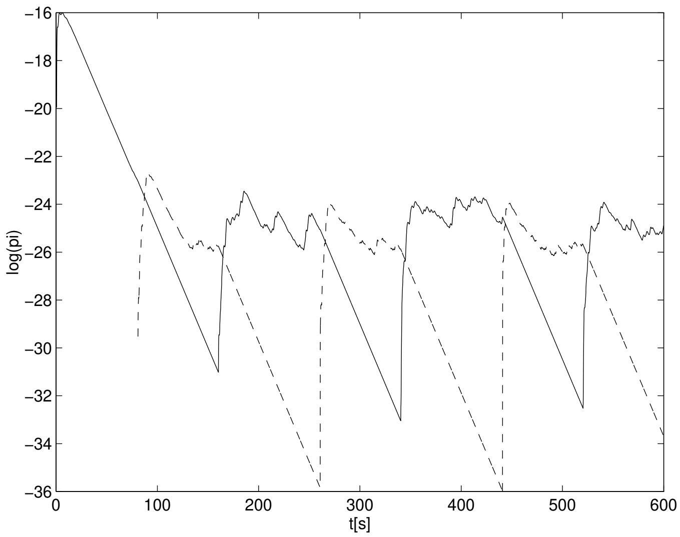

Fig. 4.19: Logaritmo dos sinais de desempenho $log(\pi_i)$

Na figura 4.20 observa-se um diagrama de fase de u e y que pode ser interpretado como a evolução de um estado parcial do sistema em cadeia fechada, que neste exemplo tende para um valor de equilíbrio ($y_{eq} = 1$, $u_{eq} = 0$).

De acordo com os resultados teóricos sobre os sistemas de controlo comutados com

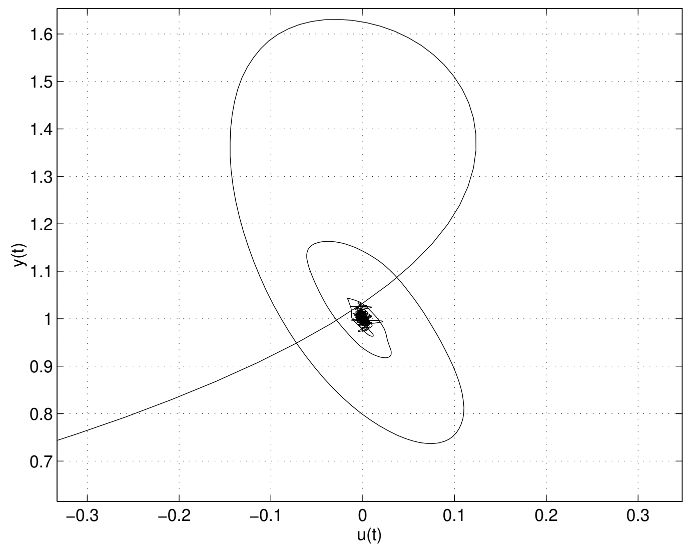

Fig. 4.20: Diagrama de fase com a variável manipulada u e a saída do processo y

supervisão, não é necessário garantir a existência de excitação persistente para assegurar a estabilidade do sistema em cadeia fechada. No entanto, a injecção de ruído de excitação pode influenciar o desempenho do sistema em cadeia fechada. Na figura 4.21 apresentam-

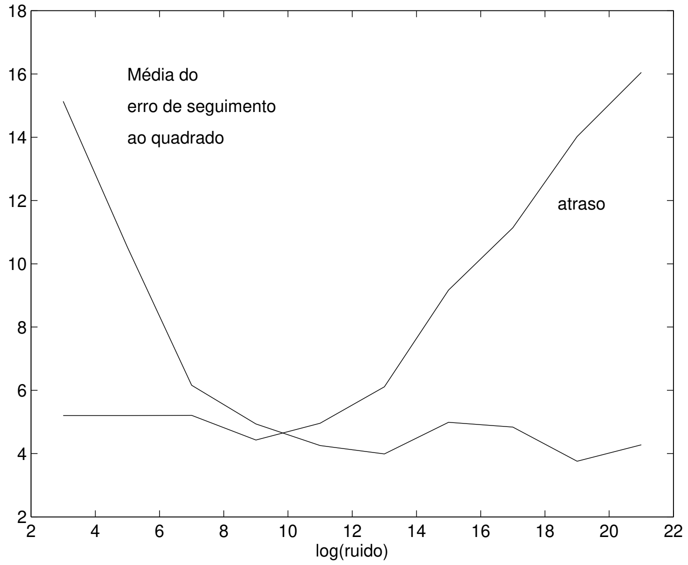

Fig. 4.21: Relação entre o ruído de excitação ($10^{-3} \leq \eta^2 \leq 10^{-21}$) o atraso do supervisor Δ_σ e o erro de seguimento e_T. Representam-se os sinais $log(\Delta_\sigma) + 11$ e $0.005\,\bar{e^2}_T$.

se os resultados do efeito do ruído de excitação (quando a potência deste varia entre 10^{-3} e 10^{-21}) sobre o atraso da decisão do supervisor Δ_σ e sobre o erro de seguimento e_T, nas condições da simulação anterior. O atraso na decisão é avaliada pela soma dos instantes de amostragem em que o índice do modelo é diferente do índice σ do supervisor, enquanto o erro de seguimento é avaliado pelo erro quadrático médio. De modo a representar ambos os sinais no mesmo gráfico representa-se o erro de seguimento de uma forma logarítmica - $log(\bar{e^2}_T) + 11$ - e o atraso multiplicado por um factor - $0.005\,\Delta_\sigma$. Na figura 4.21 observa-se que a injecção de ruído de excitação diminui o atraso na decisão do supervisor, ou seja melhora a identificabilidade do processo, quando se aumenta a potência do ruído de excitação até cerca de 10^{-8}. Por outro lado, neste exemplo, verifica-se que a presença de mais atraso na decisão do supervisor não influencia de forma visível o erro de seguimento, o qual cresce quando a potência do ruído é superior a 10^{-12}. Deste modo existe uma gama intermédia para a potência do ruído de excitação (entre 10^{-8} e 10^{-12}) que garante simultaneamente uma boa identificabilidade do processo por parte do supervisor e um erro de seguimento reduzido.

A seguir apresentam-se resultados quando o processo comuta entre os dois modelos em ciclos de com um período de $26\,s$, figura 4.22.

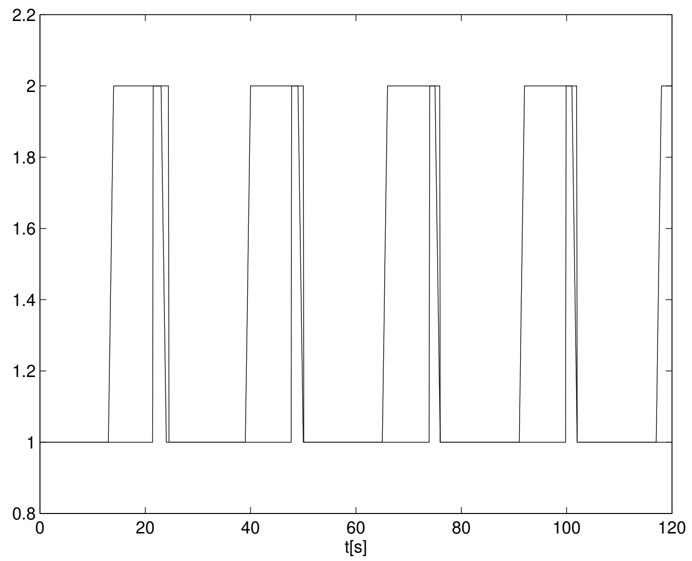

Fig. 4.22: Índice do modelo do processo activo e decisão do supervisor σ.

Como se pode observar nas figuras 4.23 e 4.24 o sistema em cadeia fechada tem um comportamento instável. Na figura 4.24 observa-se que os sinais de desempenho, no período em que correspondem ao modelo correcto, tendem exponencialmente para zero, como já se havia observado nas simulações anteriores. Assim, a instabilidade deve-se a que o decaimento dos sinais não persiste o tempo suficiente para compensar o crescimento que ocorre em cada comutação.

Deste modo, ilustra-se mais uma vez de uma forma intuitiva a necessidade de impor uma condição do tipo do "tempo de permanência" ao processo de forma a garantir a estabilidade do sistema controlado com processos variáveis no tempo.

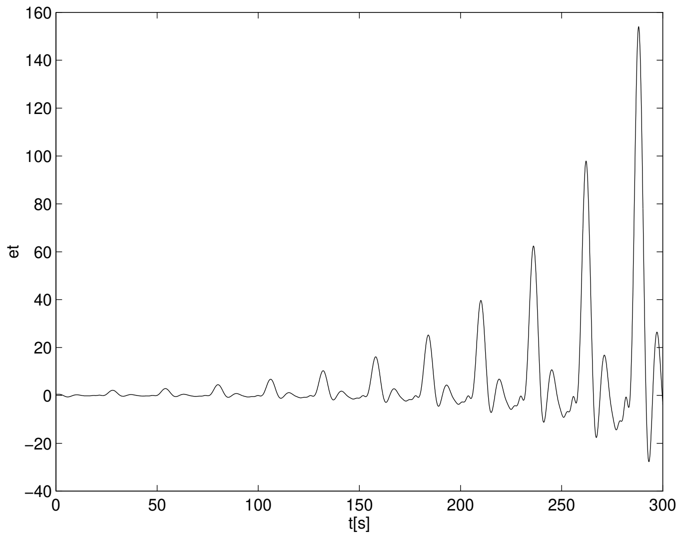

Fig. 4.23: Erro de seguimento e_T.

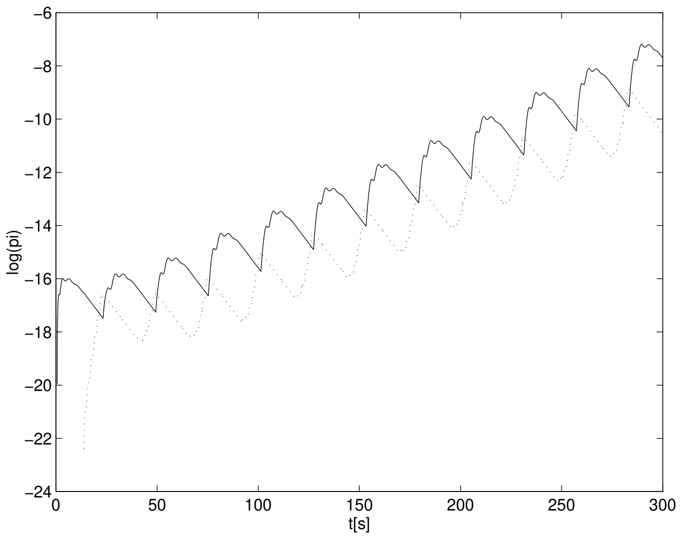

Fig. 4.24: Logaritmo do sinais de desempenho $log(\pi)$.

4.7 Conclusões

Este capítulo tem como resultado principal a análise, do ponto de vista da estabilidade, do controlo comutado aplicado a uma classe de sistemas lentamente variáveis no tempo sob a hipótese de modelação perfeita, Teorema 4.5.1. É inicialmente justificada a impossibilidade de aplicar as técnicas usadas no caso invariante de modo a extender os resultados existentes a sistemas variáveis no tempo, fazendo-se uma motivação da nova abordagem ao problema. Os resultados teóricos obtidos neste capítulo, e em particular a construção do sinal $\bar{\sigma}(k)$ são fundamentais para os resultados sobre robustez de estabilidade do capítulo 5, e abrem a possibilidade de explorar aplicações do controlo comutado em processos com variações descritas por modelos de Markov, o que é feito no capítulo 6. Apresentam-se vários resultados de simulação que ilustram a importância do tempo de permanência do processo para garantir a estabilidade do sistema controlado, bem como a influência da injecção de um ruído de excitação no desempenho do sistema.

Apêndices ao capítulo 4

4.A Construção do sistema composto com entradas d_a e r

Considerem-se as equações do estimador (3.36), (3.37) e do controlador (3.86), (3.87),

$$x_E(k+1) = \begin{bmatrix} A_E & 0 & 0 \\ 0 & A_E & 0 \\ 0 & 0 & A_E \end{bmatrix} x_E(k) + \begin{bmatrix} b_E \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} y(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ b_E \\ 0 \end{bmatrix} v(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_E \end{bmatrix} d_a(k) \tag{4.116}$$

$$y_p(k) = C_p\, x_E(k) \tag{4.117}$$

$$\begin{aligned} x_C(k+1) = {} & \begin{bmatrix} A_C & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_C \end{bmatrix} x_C(k) + \begin{bmatrix} b_C \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} v(k) + \\ & + \begin{bmatrix} 0 \\ b_C \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e_T(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_C \\ 0 \end{bmatrix} r(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ b_C \end{bmatrix} d_a(k) \end{aligned} \tag{4.118}$$

$$v_q(k) = f_q x_C(k) + g_{eq} e_T(k) + g_{rq} r(k) + g_{daq} d_a(k) \tag{4.119}$$

De modo a facilitar as manipulações algébricas, definam-se

$$A_{E3} = Diag(A_E, A_E, A_E) \qquad A_{C4} = Diag(A_C, A_C, A_C, A_C) \tag{4.120}$$

$$b_{E1} = [\, b_E \;\; 0 \;\; 0\,]' \qquad b_{E2} = [\, 0 \;\; b_E \;\; 0\,]' \qquad b_{E3} = [\, 0 \;\; 0 \;\; b_E\,]' \tag{4.121}$$

$$b_{C1} = [\, b_C \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0\,]' \qquad b_{C2} = [\, 0 \;\; b_C \;\; 0 \;\; 0\,]' \tag{4.122}$$

$$b_{C3} = [\, 0 \;\; 0 \;\; b_C \;\; 0\,]' \qquad b_{C4} = [\, 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; b_C\,]' \tag{4.123}$$

Assim, tem-se

$$x_E(k+1) = A_{E3}x_E(k) + b_{E1}y(k) + b_{E2}v(k) + b_{E3}d_a(k) \tag{4.124}$$

$$y_p(k) = C_p\, x_E(k) \tag{4.125}$$

$$x_C(k+1) = A_{C4}x_C(k) + b_{C1}v(k) + b_{C2}e_T(k) + b_{C3}r(k) + b_{C4}d_a(k) \tag{4.126}$$

$$v_q(k) = f_q x_C(k) + g_{eq}e_T(k) + g_{rq}r(k) + g_{daq}d_a(k) \tag{4.127}$$

Por definição $y_p = C_p\, x_E$ e $e_T = r - y$, donde usando (4.125) se tem

$$y(k) = C_p x_E(k) - e_p(k) \tag{4.128}$$

e

$$e_T(k) = -C_p x_E(k) + r(k) + e_p(k) \tag{4.129}$$

Substituindo em (4.124-4.127),

$$x_E(k+1) = A_{E3}x_E(k) + b_{E1}(C_p x_E(k) - e_p(k)) + b_{E2}v(k) + b_{E3}d_a(k) \tag{4.130}$$

$$y_p(k) = C_p\, x_E(k) \tag{4.131}$$

$$x_C(k+1) = A_{C4}x_C(k) + b_{C1}v(k) + b_{C2}(-C_p x_E(k) + r(k) + e_p(k)) + b_{C3}r(k) + b_{C4}d_a(k) \tag{4.132}$$

$$v_q(k) = f_q x_C(k) + g_{eq}(-C_p x_E(k) + r(k) + e_p(k)) + g_{rq}r(k) + g_{daq}d_a(k) \tag{4.133}$$

$$\begin{array}{l} x_E(k+1) = \\ x_C(k+1) \end{array} \begin{bmatrix} A_{E3} & 0 \\ 0 & A_{C4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_E(k) \\ x_C(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{E2} \\ b_{C1} \end{bmatrix} v(k) + \begin{bmatrix} b_{E1} \\ -b_{C2} \end{bmatrix} [\, C_p \;\; 0\,] \begin{bmatrix} x_E(k) \\ x_C(k) \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} -b_{E1} \\ b_{C2} \end{bmatrix} e_p(k) + \begin{bmatrix} b_{E3} \\ b_{C4} \end{bmatrix} d_a(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ b_{C2} + b_{C3} \end{bmatrix} r(k) \tag{4.134}$$

$$v_q(k) = [\, -g_{eq}C_p \;\; f_q\,] \begin{bmatrix} x_E(k) \\ x_C(k) \end{bmatrix} + (g_{eq} + g_{rq})\, r(k) + g_{daq}\, d_a(k) + g_{eq}\, e_p(k) \tag{4.135}$$

definindo b, d, C_{lp} e f_{qp} de acordo com (3.150), (3.149),(3.152), e (3.153)

$$A_p = \begin{bmatrix} A_{E3} & 0 \\ 0 & A_{C4} \end{bmatrix} - d\,[\,C_p \;\; 0\,] \tag{4.136}$$

e

$$d' = \begin{bmatrix} b_{E3} \\ b_{C4} \end{bmatrix} \qquad d'' = \begin{bmatrix} 0 \\ b_{C2} + b_{C3} \end{bmatrix} \tag{4.137}$$

tem-se

$$x(k) = A_p\, x(k) + b\, v(t) + d\, e_p(k) + d'\, d_a(k) + d''\, r(k) \tag{4.138}$$

$$v_q(k) = f_{qp}\, x(k) + g_{eq}\, e_p(k) + (g_{eq} + g_{rq})\, r(k) + g_{daq}\, d_a(k) \tag{4.139}$$

substituindo $v(k) = v_q(k)$ na equação de estado, obtém-se finalmente

$$x(k) = (A_p + b\, f_{qp})\, x(k) + (d + b\, g_{eq})\, e_p(k) + (d' + b\, g_{daq})\, d_a(k) + (d'' + b(g_{eq} + g_{rq}))\, r(k) \tag{4.140}$$

4.B Demonstração do lema 4.2.1

Demonstração Por definição dos sinais de desempenho tem-se

$$\pi_i(k+1) = \lambda_\pi \pi_i(k) + e^2(k) \tag{4.141}$$

então para $\pi(k)$, e $k > k_0$ obtém-se

$$\pi_i(k) = \lambda_\pi^{k-k_0} \pi_i(k_0) + \sum_{j=k_0}^{k-1} \lambda_\pi^{k-j-1} e_i^2(j) \tag{4.142}$$

e dado que

$$\sum_{j=k_0}^{k-1} \lambda_\pi^{k-j-1} e_i^2(j) \geq 0 \tag{4.143}$$

obtém-se

$$\pi_i(k) \geq \lambda_\pi^{k-k_0} \pi_i(k_0) \tag{4.144}$$

ou o que é equivalente

$$\lambda_\pi^{k_0-k} \pi_i(k) \geq \pi_i(k_0) \tag{4.145}$$

Substituindo (4.145) no lado esquerdo da primeira desigualdade de (4.9) tem-se

$$\pi_i(k)\, \lambda_\pi^{k_a^*-k} \geq \pi_i(k_a^*) \geq \pi_j(k_b^*)\, \lambda_\pi^{k_a^*-k_b^*} \tag{4.146}$$

$$\pi_i(k) \geq \pi_i(k_a^*)\, \lambda_\pi^{k-k_a^*} \geq \pi_j(k_b^*)\, \lambda_\pi^{k_a^*-k_b^*+k-k_a^*} \tag{4.147}$$

$$\pi_i(k) \geq \pi_j(k_b^*)\, \lambda_\pi^{k-k_b^*} \tag{4.148}$$

Substituindo (4.145) no lado direito da desigualdade (4.148) para $k < k_b^*$ obtém-se

$$\pi_i(k) \geq \pi_j(k_b^*)\,\lambda_\pi^{k-k_b^*} \geq \pi_j(k) \tag{4.149}$$

donde se obtém, finalmente

$$\pi_i(k) \geq \pi_j(k) \tag{4.150}$$

como se pretendia demonstrar.

4.C Demonstração do lema 4.3.1

Demonstração

$$\sum_{k\in\mathcal{I}} \psi(k) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k\in\mathcal{C}_i} \psi(k) \tag{4.151}$$

de (4.42), tem-se

$$\sum_{k\in\mathcal{I}} \psi(k) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k\in\mathcal{C}_i} \phi_i(k) \tag{4.152}$$

$$\sum_{k\in\mathcal{I}} \psi(k) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k\in\mathcal{C}_i \,\wedge\, k\notin\mathcal{I}_{iu}} \phi_i(k) + \sum_{k\in\mathcal{I}_{iu}} \phi_i(k) \right) \tag{4.153}$$

de acordo com o exposto em (4.39),

$$\sum_{k\in\mathcal{C}_i \wedge k\notin\mathcal{I}_{iu}} \phi_i(k) = 0 \tag{4.154}$$

donde,

$$\sum_{k\in\mathcal{I}} \psi(k) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k\in\mathcal{I}_{iu}} \phi_i(k) \tag{4.155}$$

discriminando o índice p^*

$$\sum_{k\in\mathcal{I}} \psi(k) = \sum_{1\leq i\leq n \,\wedge i\neq p^*} \sum_{k\in\mathcal{I}_{iu}} \phi_i(k) + \sum_{k\in\mathcal{I}_{p^*u}} \phi_p^*(k) \tag{4.156}$$

de (4.38), obtém-se

$$\sum_{k\in\mathcal{I}} \psi(k) = \sum_{1\leq i\leq n \,\wedge i\neq p^*} \sum_{k\in\mathcal{I}_{iu}} \phi_i(k) \tag{4.157}$$

dependendo do intervalo $\mathcal{I}_{iu}$ tem-se de (4.40) e (4.41)

$$\sum_{k\in\mathcal{I}_{iu}} \phi_i(k) = 0 \quad para \quad k_{iu+1} - k_i u > T_D \tag{4.158}$$

ou

$$\sum_{k\in\mathcal{I}_{iu}} \phi_i(k) = \sum_{k\in\mathcal{I}_{iu}} 1 \quad para \quad k_{iu+1} - k_i u \leq T_D \tag{4.159}$$

$$\sum_{k\in\mathcal{I}_{iu}} \phi_i(k) \leq T_D \quad para \quad k_{iu+1} - k_i u \leq T_D \tag{4.160}$$

ou seja,

$$\sum_{k\in\mathcal{I}} \psi(k) \leq \sum_{1\leq i\leq n \wedge i\neq p^*} T_D \leq T_D \sum_{1\leq i\leq n \wedge i\neq p^*} 1 \tag{4.161}$$

O número de índices é n, sob a hipótese de modelação perfeita tem-se que $1 \leq p^* \leq n$, então o somatório é feito sobre $n-1$ termos,

$$\sum_{k\in\mathcal{I}} \psi(k) \leq T_D(n-1) \tag{4.162}$$

Como se pretendia demonstrar.

∎

4.D Demonstração do lema 4.3.3

$$z(k) = \Phi_A z_0 + \sum_{j=k_0}^{k-1} \Phi_A(k, j+1)B(j)z(j) \tag{4.163}$$

$$z(k) = \gamma\lambda^{k-k_0} z_0 + \sum_{j=k_0}^{k-1} \gamma\lambda^{k-j+1} B(j)z(j) \tag{4.164}$$

$$z(k)\lambda^{-k} = z_0\lambda^{-k_0}\gamma + \frac{\gamma}{\lambda}\sum_{j=k_0}^{k-1} B(j)z(j)\lambda^{-j} \tag{4.165}$$

com $\phi(k) = z(k)\lambda^{-k}$ tem-se

$$\phi(k) = \phi(k_0)\gamma + \frac{\gamma}{\lambda}\sum_{j=k_0}^{k-1} B(j)\phi(j) \tag{4.166}$$

$$\phi(k) \leq \gamma\, \phi(k_0) + \frac{\gamma}{\lambda}\sum_{j=k_0}^{k-1} \|B(j)\|\, \phi(j) \tag{4.167}$$

aplicando o lema de Bellman-Gronwall

$$\phi(k) \leq \gamma\, \phi(k_0) e^{\gamma \sum_{j=k_0}^{k-1} \|B(j)\|} \tag{4.168}$$

admitindo que

$$\sum_{j=k_0}^{\infty} \|B(j)\| \leq \beta \tag{4.169}$$

$$\phi(k) \leq \gamma\, \phi(k_0) e^{\gamma\beta} \tag{4.170}$$

donde

$$\|z(k)\| \leq \gamma e^{\gamma\beta}\, \lambda^{k-k_0}\, \|z(k_0)\| \tag{4.171}$$

como se queria demonstrar.

5. Robustez do controlo comutado face a dinâmica não modelada

Neste capítulo analisam-se as propriedades de estabilidade de um controlador comutado em processos variáveis no tempo admitindo incerteza nos modelos, e determina-se uma margem máxima para a incerteza que garanta estabilidade.

O objectivo deste capítulo é determinar qual a margem de incerteza dos modelos que garante as mesmas propriedades de estabilidade (BIBO), definidas para o sistema controlado no capítulo 4, as quais foram baseadas admitindo a modelação exacta do processo.

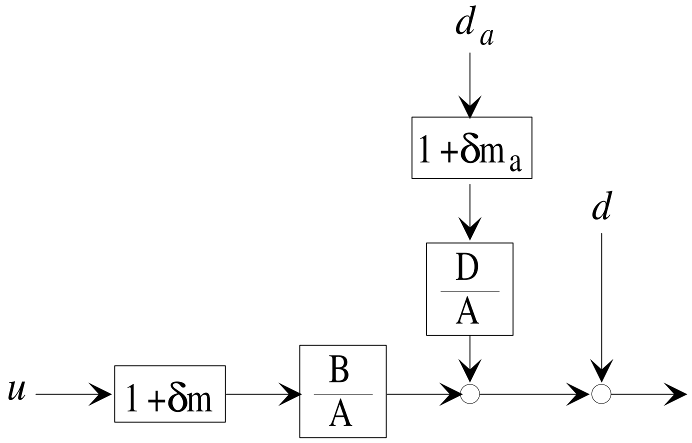

Fig. 5.1: Modelo do processo admitindo incerteza face ao modelo nominal.

De acordo com o modelo representado na fig. 5.1, considere-se a seguinte descrição válida para um intervalo de tempo $k^*_{i-1} \leq k < k^*_i$ tal que o processo possa ser representado por um sistema linear invariante no tempo.

$$y = (1+\delta_m)\frac{B}{A}u \;+\; (1+\delta_{ma})\frac{D}{A}d_a \;+\; d \tag{5.1}$$

em que δ_m e δ_{ma} são funções de transferência com norma limitada (a qual será definida mais à frente) que representam a dinâmica não modelada do tipo multiplicativo.

5.1 Análise da robustez de estabilidade

Admita-se o seguinte estimador para o modelo nominal do processo,

$$\hat{y}_{p*} = \frac{A_0 - A}{A_0} y \; + \; \frac{B}{A_0} u + \; \frac{D}{A_0} d_a \tag{5.2}$$

de acordo com a descrição representada na figura 5.1, obtém-se sucessivamente, para o erro

$$e_{p*} = \hat{y}_{p*} - y \tag{5.3}$$

$$\begin{aligned} e_{p*} \;\; = \;\; & \frac{A_0 - A}{A_0}(1 + \delta_m)\frac{B}{A} u \; + \; \frac{A_0 - A}{A_0}(1 + \delta_{ma})\frac{D}{A} d_a \\ & + \frac{A_0 - A}{A_0} d + \frac{B}{A_0} u + \frac{D}{A_0} d_a \\ & -(1 + \delta_m)\frac{B}{A} u - (1 + \delta_{ma})\frac{D}{A} d_a - d \end{aligned} \tag{5.4}$$

$$e_{p*} \;\; = \;\; -\frac{A}{A_0}\,\frac{B}{A}\,(\delta_m)\,u - \frac{A}{A_0}\,\frac{D}{A}\,(\delta_{ma})\,d_a - \frac{A}{A_0}\,d \tag{5.5}$$

$$e_{p*} \;\; = \;\; -\frac{B}{A_0}\,(\delta_m)\,u - \frac{D}{A_0}\,(\delta_{ma})\,d_a - \frac{A}{A_0}\,d \tag{5.6}$$

que é uma equação de erro que relaciona o erro de estimação do modelo nominal face ao processo, com os erros de modelação admitidos no modelo nominal.

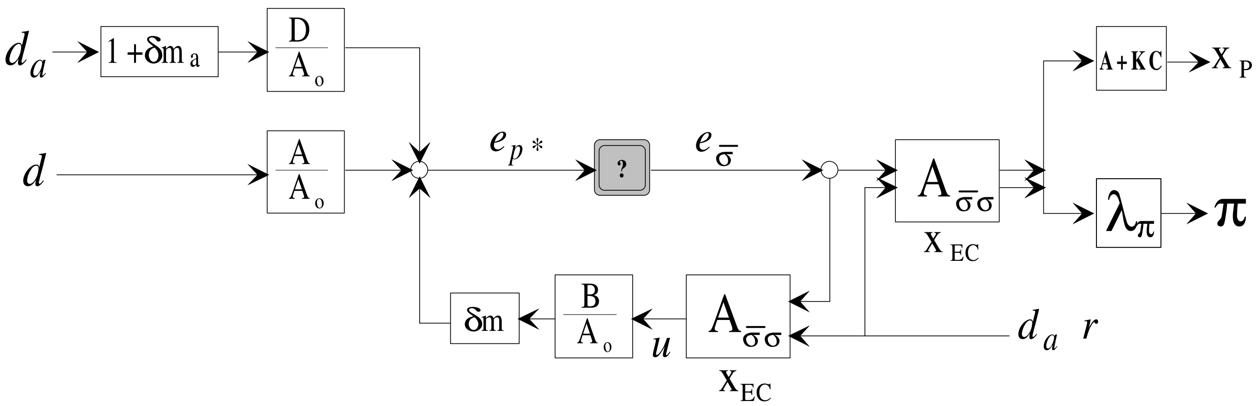

Fig. 5.2: Relação entre os sinais d, d_a, $e_{\bar{\sigma}}$ e e_{p*}.

Observando a relação entre u e o estado composto $\{x_E, x_C\}$ (apêndice 4.A), pode definir-se u em função de d_a, r, e e_i. Em particular considera-se o índice $i = \bar{\sigma}$. Deste modo tem-se o diagrama de blocos da fig. 5.2 que representa a dependência entre as perturbações d, d_a, o sinal $e_{\bar{\sigma}}$, e o erro de estimação do modelo nominal e_{p*}. O índice $\bar{\sigma}$ é definido no capítulo anterior, por (4.13).

Pretende-se definir uma norma para os sinais e uma norma induzida para os subsistemas representados de modo a determinar qual a relação entre $\|e_{p^*}\|$ e $\|e_{\bar{\sigma}}\|$.

Se o ganho de $\|e_{p^*}\|$ para $\|e_{\bar{\sigma}}\|$ for majorado, pela aplicação do teorema do ganho pequeno, conclui-se que existe um valor máximo para $\|\delta_m\| > 0$ que garante a estabilidade do sistema em cadeia fechada. Note-se que a estabilidade do sistema é definida em função da norma $\|.\|$, pelo que é necessário definir essa norma.

Recorde-se que no capítulo 4 o sinal $\bar{\sigma}$ se definiu, para cada intervalo entre duas comutações do controlador, como

$$\overline{\sigma}(k) = \begin{cases} \sigma(b) & se \quad \pi_{\sigma(k_i)}(k_i) \leq \pi_{p^*}(k_j^*)\, \lambda^{k_i - k_j^*} \\ p^* & se \quad \pi_{\sigma(k_i)}(k_i) > \pi_{p^*}(k_j^*)\, \lambda^{k_i - k_j^*} \end{cases} \tag{5.7}$$

e para o último dos intervalos, $[k_u, k_j^*]$, defina-se como

$$\overline{\sigma}(k) = \begin{cases} \sigma(b) & se \quad k_j^* - k_u \geq T_D \\ p^* & se \quad k_j^* - k_u < T_D \end{cases} \tag{5.8}$$

O facto da escolha do índice $\bar{\sigma}$ ser feita com base na comparação entre $\pi_{\sigma(k)}(k)\lambda^{-k}$ e $\pi_{p^*}(k^*)\lambda^{-k^*}$ (e dada a definição de $\pi_i(k)$) sugere a utilização da norma ponderada-λ, definida por

$$\|x(k)\|^2_{\lambda(k_0,k)} = \sum_{j=k_0}^{k-1} (\lambda^{k_0-j-1} x(j))^2 \tag{5.9}$$

ou seja

$$\|x(k)\|_{\lambda(k_0,k)} = \sqrt{\sum_{j=k_0}^{k-1} \lambda^{2(k_0-j-1)} x^2(j)} \tag{5.10}$$

com $0 < \lambda < 1$.

Esta "intuição" deriva do seguinte. Considerando a definição de $\pi_i(k)$ dada por 3.30, tem-se sucessivamente

$$\pi_i(k) = \pi_i(k_0)\lambda_\pi^{k-k_0} + \sum_{j=k_0}^{k-1} \lambda_\pi^{k-j-1} e^2(j) \tag{5.11}$$

$$\pi_i(k)\lambda_\pi^{-k} = \pi_i(k_0)\lambda_\pi^{-k_0} + \sum_{j=k_0}^{k-1} \lambda_\pi^{-j-1} e^2(j) \tag{5.12}$$

e, pela definição da norma ponderada-λ

$$\pi_i(k)\lambda_\pi^{-k} = \pi_i(k_0)\lambda_\pi^{-k_0} + \lambda_\pi^{-k_0} \|e(k)\|^2_{\lambda_\pi^{1/2}(k_0,k)} \tag{5.13}$$

Assim, a definição de $\bar{\sigma}(k)$, à parte as condições iniciais $\Pi(k_0)$, pode ser feita com base na comparação das normas ponderadas $\|e_{p^*}\|^2_{\lambda(k_0,k)}$ e $\|e_\sigma\|^2_{\lambda(k_0,k)}$. Note-se que neste capítulo a norma $\|.\|$ sem sub-índice continua a denotar uma norma compatível com o espaço vectorial $\Re^n$, em particular a norma euclidiana.

Da norma (5.9) têm-se os seguintes factos justificados em apêndice a este capítulo (apêndice 5.A).

Para qualquer sequência discreta $u(k)$:

Proposição 5.1.1 *Se $|u(k)|$ é majorado, então $\|u(k)\|_{\lambda(k_0,k)}\lambda^{k-k_0}$ é majorado para $k > k_0$. E se $\|u(k)\|_{\lambda(k_0,k)}$ é majorado então*

$$u(k) \leq c\,\lambda^{k-k_0}$$

■

Proposição 5.1.2 *Sistemas SISO lineares têm norma ponderada-λ finita se são uniformemente exponencialmente estáveis com decaimento mais rápido que λ^k. Ou seja, um sistema discreto de estado x tem norma λ-ponderada finita se for tal que*

$$\|x(k)\| \leq \gamma \lambda_1^{k-k_0} \|x(k_0)\| \tag{5.14}$$

com $\gamma \geq 0$ e $1 > \lambda_1 > \lambda$

■

Proposição 5.1.3 *Se o sinal de entrada é tal que $\|u(k)\|_{\lambda(k_0,k)}\lambda^{k-k_0}$ é majorado e o sistema tem norma ponderada-λ finita, então $\|y(k)\|$ é majorado*

■

Note-se que o sistema composto $\{x_E, x_C\}$ que define a relação das perturbações d, d_a e da referência r para e_i, u, e y é, como se viu no capítulo anterior, um sistema linear variável no tempo.

Considerem-se as funções $\phi_i(k)$ que definem os instantes de tempo em que o i-ésimo controlador está activo. Ou seja, $\phi_i(k) = 1$ apenas nos instantes em que o controlador activo é o i-ésimo controlador.

Assim, definam-se as funções $\phi_i(k)$ tal que

$$\phi_i(k) = \begin{cases} 1 & se \;\; \bar{\sigma}(k) = i \\ 0 & c.c. \end{cases} \tag{5.15}$$

como se ilustra na figura 5.3 e defina-se o sinal $e_{\bar{\sigma}(k)}(k)$ em função dos erros de predição $e_i(k)$

$$e_{\bar{\sigma}(k)}(k) = \sum_{i \in \mathcal{P}} \phi_i(k) e_i(k) \tag{5.16}$$

Pela definição da norma ponderada-λ, tem-se

$$\|e_{\bar{\sigma}(k)}(k)\|^2_{\lambda(k_0,k)} = \sum_{j=k_0}^{k-1} \lambda^{k_0-j-1} e^2_{\bar{\sigma}(j)}(j) = \sum_{j=k_0}^{k-1} \lambda^{k_0-j-1} \left(\sum_{i \in \mathcal{P}} \phi_i(j) e_i(j) \right)^2 \tag{5.17}$$

Como em cada instante k existe apenas um índice $\bar{\sigma}$ tal que a função $\phi_{\bar{\sigma}} \neq 0$

$$\|e_{\bar{\sigma}(k)}(k)\|^2_{\lambda(k_0,k)} = \sum_{j=k_0}^{k-1} \lambda^{k_0-j-1} \sum_{i \in \mathcal{P}} \phi_i^2(j) e_i^2(j) \tag{5.18}$$

e como se tem que $\phi_i^2(k) = \phi_i(k)$

$$\|e_{\bar{\sigma}(k)}(k)\|^2_{\lambda(k_0,k)} = \sum_{j=k_0}^{k-1} \lambda^{k_0-j-1} \sum_{i \in \mathcal{P}} \phi_i(j) e_i^2(j) = \sum_{j=k_0}^{k-1} \sum_{i \in \mathcal{P}} \lambda^{k_0-j-1} \phi_i(j) e_i^2(j) \tag{5.19}$$

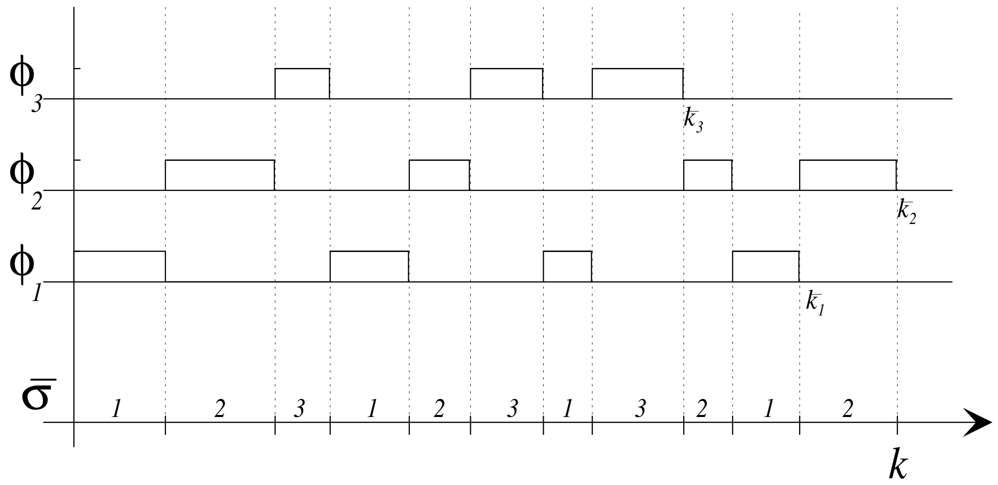

Fig. 5.3: Divisão dos instantes de tempo de acordo com o índice $\bar{\sigma}$.

A definição de ϕ_i, de modo que em cada instante só existe um índice i tal que $\phi_i \neq 0$, implica que se pode trocar a ordem dos somatórios

$$\|e_{\bar{\sigma}(k)}(k)\|^2_{\lambda(k_0,k)} = \sum_{i \in \mathcal{P}} \sum_{j=k_0}^{k-1} \lambda^{k_0-j-1} \phi_i(j) e_i^2(j) \tag{5.20}$$

Para cada $i \in \mathcal{P}$ defina-se $\bar{k}_i \leq k$ como o maior instante de tempo tal que $\phi_i \neq 0$. Note-se que $\bar{k}_i$ coincide com um dos instantes de comutação do controlador, definido pelo índice σ, excepto para o índice que está activo no instante k para o qual se tem $\bar{k}_{\bar{\sigma}(k)} = \bar{k}_{\sigma(k)} = k$. Assim, para as parcelas referentes a i, tem-se que $\phi_i(j) = 0$ para $j > \bar{k}_i$, donde

$$\|e_{\bar{\sigma}(k)}(k)\|^2_{\lambda(k_0,k)} = \sum_{i \in \mathcal{P}} \sum_{j=k_0}^{\bar{k}_i-1} \lambda^{k_0-j-1} \phi_i e_i^2(j) \tag{5.21}$$

Como todas as parcelas são positivas e $0 \leq \phi_i \leq 1$

$$\|e_{\bar{\sigma}(k)}(k)\|^2_{\lambda(k_0,k)} \leq \sum_{i\in\mathcal{P}} \sum_{j=k_0}^{\bar{k}_i-1} \lambda^{k_0-j-1} e_i^2(j) = \sum_{i\in\mathcal{P}} \|e_i\|^2_{\lambda(k_0,\bar{k}_i)} \tag{5.22}$$

em que $\bar{k}_i < k$

Por definição de $\bar{\sigma}$

$$\pi_{\bar{\sigma}(k')}(k')\lambda_\pi^{-k'} \leq \pi_{p^*}(k)\lambda_\pi^{-k} \quad para \quad k' < k \tag{5.23}$$

aplicando (5.13) e escolhendo λ tal que $\lambda_\pi^{1/2} < \lambda < 1$

$$\|e_{\bar{\sigma}(k')}(k')\|^2_{\lambda(k_0,k')} \leq \|e_{p^*}(k)\|^2_{\lambda(k_0,k)} + \big(\pi_{p^*}(k_0) - \pi_{\bar{\sigma}(k')}(k_0))\big) \tag{5.24}$$

em particular para $k' = \bar{k}_i$

$$\|e_{\bar{\sigma}(\bar{k}_i)}(\bar{k}_i)\|^2_{\lambda(k_0,\bar{k}_i)} \leq \|e_{p^*}(k)\|^2_{\lambda(k_0,k)} + \big(\pi_{p^*}(k_0) - \pi_{\bar{\sigma}(\bar{k}_i)}(k_0))\big) \tag{5.25}$$

Note-se que quando $k = \bar{k}_i$ se tem que $\bar{\sigma} = i$, ou seja $\bar{\sigma}(\bar{k}_i) = i$.

$$\|e_i(\bar{k}_i)\|^2_{\lambda(k_0,\bar{k}_i)} \leq \|e_{p^*}(k)\|^2_{\lambda(k_0,k)} + (\pi_{p^*}(k_0) - \pi_i(k_0))) \tag{5.26}$$

Substituindo em (5.22),

$$\|e_{\bar{\sigma}(k)}(k)\|^2_{\lambda(k_0,k)} \leq \sum_{i\in\mathcal{P}} \|e_{p^*}\|^2_{\lambda(k_0,k)} + \sum_{i\in\mathcal{P}} (\pi_{p^*}(k_0) - \pi_i(k_0))) \tag{5.27}$$

Considerando que o número de controladores/modelos é n, tem-se

$$\|e_{\bar{\sigma}(k)}(k)\|^2_{\lambda(k_0,k)} \leq n\|e_{p^*}\|^2_{\lambda(k_0,k)} + n\, C_\pi\, \Pi(k_0) \tag{5.28}$$

$$\|e_{\bar{\sigma}(k)}(k)\|_{\lambda(k_0,k)} \leq \sqrt{n}\|e_{p^*}\|_{\lambda(k_0,k)} + \sqrt{n}\,\sqrt{C_\pi}\,\sqrt{|\Pi(k_0)|} \tag{5.29}$$

em que $C_\pi = \|C_{\pi p^* i}\|$, e este é tal que $\pi_{p^*}(k_0) - \pi_i(k_0) = C_{\pi p^* i}\Pi(k_0)$ ou seja, $C_{\pi p^* i}$ é um vector constituído por zeros à excepção do elemento de índice i com valor "-1" e do elemento de índice p^* com valor "1", cuja norma euclidiana é $\|C_{\pi p^* i}\| = \sqrt{2}$, ou no caso em que $i = p^*$, tem-se $C_{\pi p^* i}$ identicamente nulo.

Considere-se o ganho do sistema composto x_E, x_C (secção 4.1). Uma vez que se trata de um sistema linear estável (com matriz da dinâmica $A_{\bar{\sigma}\sigma}$), de acordo com a Proposição 5.1.2 tem norma majorada. Representa-se simbolicamente a norma desse sistema com entrada $e_{\bar{\sigma}}$ e saída u por $\|\{A_{\bar{\sigma}\sigma}, e_{\bar{\sigma}} \to u\}\|_\lambda$.

Assim, aplicando o teorema do ganho pequeno (apêndice 5.B), à cadeia fechada representada na figura 5.2, tem-se que o sistema em cadeia fechada é estável se

$$\sqrt{n}\|\{A_{\bar{\sigma}\sigma}, e_{\bar{\sigma}} \to u\}\|_\lambda \left\|\frac{B}{A_0}\right\|_\lambda \|\delta_m\|_\lambda < 1 \tag{5.30}$$

Tem-se assim um majorante para $\|\delta_m\|_\lambda$ dado por

$$\|\delta_m\|_\lambda < \frac{1}{\sqrt{n}\|\{A_{\bar{\sigma}\sigma}, e_{\bar{\sigma}} \to u\}\|_\lambda \, \|\frac{B}{A_0}\|_\lambda \, \|\delta_m\|_\lambda} \tag{5.31}$$

Este resultado resume-se no seguinte teorema:

Teorema 5.1.4 *Considere-se a interconexão de um processo P definido por (5.1), um multi-controlador K, e um supervisor nas condições do Teorema 4.5.1; e um multi-estimador E com modelos nominais definidos por (5.1), então existe $0 < \lambda < 1$ e $\delta > 0$ tal que se $\|\delta_m\|_\lambda < \delta$, com*

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{n}\|\{A_{\bar{\sigma}\sigma}, e_{\bar{\sigma}} \to u\}\|_\lambda \, \|\frac{B}{A_0}\|_\lambda \, \|\delta_m\|_\lambda} \tag{5.32}$$

a interconexão do processo, controlador, estimador, e supervisor é estável no sentido que para entradas ($d(k)$, $d_a(k)$, e $r(k)$) com norma ponderada-λ finita os sinais $e_{\bar{\sigma}}$ e e_{p^*} e o estado do sistema composto $\{E,K,P,D\}$ têm norma ponderada-λ finita.

Este resultado é análogo ao obtido em [48], sem a hipótese de condições iniciais nulas para o estado inicial $\Pi(k_0)$, com instante inicial arbitrário, e usando uma norma λ-ponderada, $\|.\|_{\lambda(k_0,k)}$, que depende do instante inicial k_0 do intervalo considerado. É isto que permite generalizar a sistemas variáveis no tempo (com tempo de permanência suficientemente grande) os resultados de estabilidade robusta de [48].

O resultado obtido é válido para um intervalo $k_i^* \leq k < k_{i+1}^*$ no qual o processo pode ser descrito por um sistema linear invariante.

Assim, neste intervalo tem-se que os sinais na cadeia considerada $e_{\bar{\sigma}}$, e_{p^*}, u e o próprio estado do sistema composto $\{x_E, x_C\}$ têm norma λ-ponderada finita, se as entradas r, d_a, e d também tiverem. Note-se que a relação entre $e_{\bar{\sigma}}$ e e_{p^*} descrita por (5.29) define um sistema linear (variável no tempo) exponencialmente estável "com uma componente constante" (*with bias*). Aplicando o teorema do ganho pequeno (apêndice 5.B) observa-se que os sinais da cadeia fechada dependem desse *bias*. Assim tem-se,

$$\|[x_E \, x_C]'\|_{\lambda(k_0,k)} \leq \gamma_1[\|r\|_{\lambda(k_0,k)} \ \|d_a\|_{\lambda(k_0,k)} \ \|d\|_{\lambda(k_0,k)}]' + \beta\|\Pi(k_0)\| \tag{5.33}$$

Multiplicando ambos os termos por λ^{k_0-k} obtém-se

$$\lambda^{k_0-k}\|[x_E \, x_C]'\|_{\lambda(k_0,k)} \leq \gamma_1\lambda^{k_0-k}[\|r\|_{\lambda(k_0,k)} \ \|d_a\|_{\lambda(k_0,k)} \ \|d\|_{\lambda(k_0,k)}]' + \beta\|\Pi(k_0)\|\lambda^{k_0-k} \tag{5.34}$$

e, aplicando a proposição 5.1.1

$$\|[x_E \, x_C]'\| \leq \gamma_1[r_M \ d_{aM} \ d_M]' + \beta\|\Pi(k_0)\|\lambda^{k_0-k} \tag{5.35}$$

em que r_M, d_{aM}, e d_M são majorantes de r, d_a, e d respectivamente. Assim, tendo em conta a influência das condições iniciais $x_E(k_0)$, $x_C(k_0)$, $x_P(k_0)$ e $\pi(k_0)$ nesse sistema linear, e repetindo o procedimento efectuado na secção 4.5 para os estados x_P e π, obtém-se

$$\begin{array}{rcl} \|x_E(k)\| & \leq & \lambda_{\pi\omega CECL}^{k-k_0}\,\gamma_{EC}\,x(k_0) + \zeta_{EC}\,[r_M\;\,d_{aM}\;\,d_M]' \\ \|x_C(k)\| & \leq & \lambda_{\pi\omega CECL}^{k-k_0}\,\gamma_{EC}\,x(k_0) + \zeta_{EC}\,[r_M\;\,d_{aM}\;\,d_M]' \\ \|x_P(k)\| & \leq & \lambda_{\pi\omega CECL}^{k-k_0}\,\gamma_{P}\,x(k_0) + \zeta_{P}\,[r_M\;\,d_{aM}\;\,d_M]' \\ \|\pi(k)\|^{\frac{1}{2}} & \leq & \lambda_{\pi\omega CECL}^{k-k_0}\,\gamma_{\pi}\,x(k_0) + \zeta_{\pi}\,[r_M\;\,d_{aM}\;\,d_M]' \end{array} \tag{5.36}$$

definindo

$$x(k) = [\|x_E(k)\|, \|x_C(k)\|, \|x_P(k)\|, \|\pi(k)\|^{\frac{1}{2}}] \tag{5.37}$$

e

$$\Gamma = [\,\gamma_{EC}\;\gamma_{EC}\;\gamma_P\;\gamma_\pi\,] \qquad \zeta = [\,\zeta_{EC}\;\zeta_{EC}\;\zeta_P\;\zeta_\pi\,] \tag{5.38}$$

tem-se

$$x(k) \leq \lambda_{\pi\omega CECL}^{k-k_0}\,\Gamma\,x(k_0) \;+\; \zeta\,[r_M\;\,d_{aM}\;\,d_M]' \tag{5.39}$$

$$\|x(k)\| \leq \lambda_{\pi\omega CECL}^{k-k_0}\,\|\Gamma\|\,\|x(k_0)\| \;+\; \|\zeta\|\,\|[r_M\;\,d_{aM}\;\,d_M]'\| \tag{5.40}$$

com

$$\lambda_{\pi\omega CECL} > max(\lambda_\pi^{\frac{1}{2}}, \lambda_\omega, \lambda_C, \lambda_E, \lambda_{CL}) \tag{5.41}$$

Assim, de acordo com a definição 2.2.1 pode concluir-se que o sistema composto pelo controlador K, estimador E, processo P e avaliador de desempenho D é uniformemente exponencialmente estável em cada processo constante num intervalo $k_i^* \leq k < k_{i+1}^*$, se a dinâmica não modelada $\|\delta_m\|$ for suficientemente pequena. Aplicando o teorema 2.2.4, conclui-se que existe um tempo de permanência T_{Dp} do processo, que garante a estabilidade exponencial uniforme do sistema total. Tem-se ainda que, com referência e perturbações limitadas, o estado se mantém limitado.

Este resultado é sumarizado no seguinte teorema.

Teorema 5.1.5 *Considere-se a interconexão de um processo P, descrito como a comutação entre modelos lineares invariantes no tempo com valores próprios dos modos não observáveis ou não controláveis menores que λ_ω, pertencente a uma família de processos de ordem majorada; de um multi-estimador E com valores próprios menores que λ_E; de um multi-controlador K com valores próprios menores que λ_C e tal que a cadeia fechada do controlador com índice i com o modelo de índice i resulta num sistema com* *valores próprios menores que λ_{CL}; de um gerador de sinais de desempenho D com valores próprios λ_π; e de um mecanismo de comutação S com a imposição de um tempo de permanência T_D, fig. 3.8. Então, existe um T_{Dp} finito e um $\delta > 0$, tal que se a incerteza associada aos modelos $\|\delta_m\| < \delta$ e se o processo P é um sistema linear com tempo de permanência T_{Dp}, então o sistema composto $\{E, K, P, \Pi\}$ é uniformemente exponencialmente estável com decaimento $\lambda_{\pi\omega CECL}$,*

$$\lambda_{\pi\omega CECL} > max(\lambda_\pi^{\frac{1}{2}}, \lambda_\omega, \lambda_C, \lambda_E, \lambda_{CL}) \tag{5.42}$$

■

5.2 Exemplos de Simulação

No exemplo de simulação seguinte ilustra-se o resultado de estabilidade robusta obtido na secção anterior. Dá-se ainda um passo na direcção de mostrar como é que as condições de estabilidade robusta podem ser relacionadas com a distância de entre modelos, medida pela métrica de Vinnicombe.

Exemplo 5.1

Neste exemplo usa-se o mesmo processo e a mesma estrutura de controlo da utilizada no exemplo 4.2. Considera-se, no entanto, que não existe uma modelação perfeita do processo. De acordo com os resultados teóricos obtidos na secção anterior existe sempre uma margem (estrictamente maior que zero) para a robustez de estabilidade. No entanto, o cálculo explícito dessa margem é complexo e muito conservador, não sendo possível retirar conclusões quanto à robustez de desempenho. Assim, de modo a ilustrar a robustez do sistema controlado, apresentam-se resultados de simulação em que os modelos do processo são obtidos a partir dos modelos nominais admitindo-se uma variação nos coeficientes dos polinómios que descrevem a função de transferência até 2.5%. Uma vez que o integrador duplo que existe nos modelos surge de forma natural da física do processo, optou-se por impor que o integrador duplo permanecesse inalterado. Os modelos considerados foram:

$$A_1'(q) = q^4 - 4.004q^3 + 6.018q^2 - 4.024q + 1.01 \tag{5.43}$$

$$B_1'(q) = 1.27e-6q^3 + 1.354e-5q^2 + 1.394e-5q + 1.23e-6 \tag{5.44}$$

$$A_2'(q) = q^4 - 4.004q^3 + 6.0319q^2 - 4.0518q + 1.0239 \tag{5.45}$$

$$B_2'(q) = 4.164e-6q^3 + 4.575e-5q^2 + 4.575e-5q + 4.164e-6 \tag{5.46}$$

com estes modelos, cada controlador projectado anteriormente continua a estabilizar o modelo respectivo. Esta é uma condição necessária (mas não suficiente) para garantir a estabilidade do sistema controlado. No entanto a margem de estabilidade, do sistemas $\{K_i, P_i'\}$ em cadeia fechada é agora menor, o que pode ser verificado observando o módulo dos valores próprios da combinação modelo/controlador e comparando-as com (4.115),

$$\lambda_{11} = 0.9954 \qquad \lambda_{22} = 0.9913 \tag{5.47}$$

As simulações foram efectuadas com ruído de excitação de potência $\eta^2 = 10^{-9}$, e o processo comuta entre o modelo 1 e 2 a cada $100\,s$.

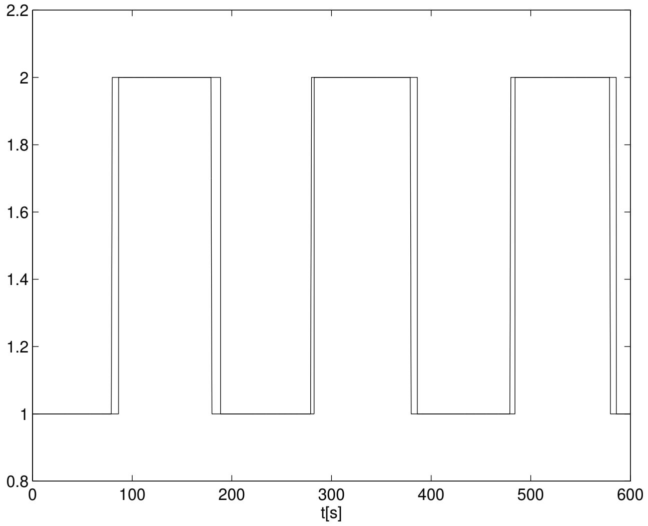

Fig. 5.4: Índice do modelo do processo activo e decisão do supervisor σ, com dinâmica não modelada.

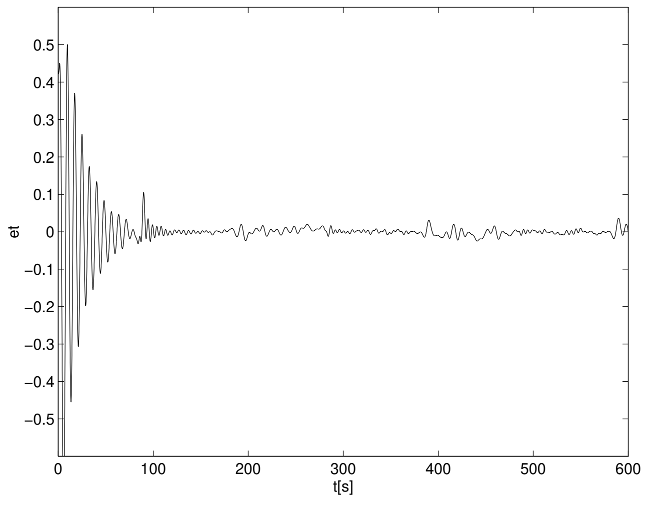

Fig. 5.5: Erro de seguimento e_T, com dinâmica não modelada.

Nas figuras 5.4 a 5.6 observa-se que o sistema mantém a estabilidade.

Na figura 5.5 observa-se o erro de seguimento, cujo decaimento para zero é mais lento do que nas simulações do Capítulo 4, tal como seria de esperar dado a margem de estabilidade em cadeia fechada ser inferior.

Na figura 5.6 observa-se que, ao contrário do caso em que existe modelação perfeita, os sinais de desempenho não têm nunca um decaimento exponencial para zero, acompanhando, no entanto, a alternância da dinâmica do processo.

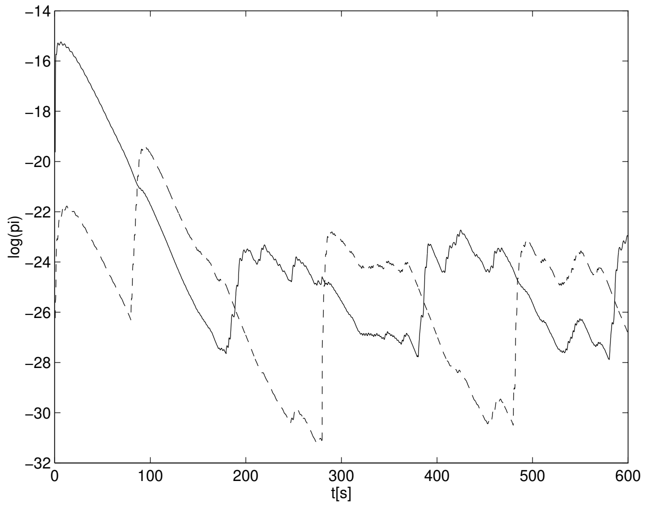

Fig. 5.6: Logaritmo dos sinais de desempenho $log(\pi_i)$, com dinâmica não modelada.

O valor dos sinais de desempenho podem assim ser interpretados como uma medida da distância entre os modelos nominais e o modelo do processo. No entanto, esta medida depende dos sinais exógenos do processo.

Sobre a relação que é possível estabelecer entre uma distância (*descrepância de referência virtual*) e a inferência do desempenho, através de uma filtragem dos erros de predição veja-se [51, 52].

Uma outra medida da distância entre sistemas lineares é a distância de Vinnicombe (ν-*gap*) [2, 76, 77]. Considerando dois sistemas contínuos (com funções de transferência $P_1(s)$ e $P_2(s)$), com uma entrada e uma saída, a distância de Vinnicombe pode definir-se por:

$$\delta_\nu(P_1, P-2) = \begin{cases} \sup_\omega \kappa(P_1(j\omega), P_2(j\omega)) & se \;\; wno(1 + P_2^* P_1) + \eta(P_1) - \tilde{\eta}(P_2) = 0 \\ 1 & c.c. \end{cases} \tag{5.48}$$

em que $P^*(s) = P(-s)$; $wno(X(s))$ é o número de voltas que o diagrama de Nyquist de $X(s)$ dá, no sentido directo, em torno da origem; $\eta(P)$ é o número de pólos de P no semiplano direito aberto; $\tilde{\eta}(P)$ é o número de pólos de P no semiplano direito fechado, e $\kappa(P_1(s), P_2(s))$ é definido por

$$\kappa(P_1(s), P_2(s)) = \frac{|P_1(s) - P_2(s)|}{\sqrt{1 + |P_1(s)|^2}\sqrt{1 + |P_2(s)|^2}} \tag{5.49}$$

Para o caso de sistemas discretos a métrica de Vinnicombe é idêntica ao caso contínuo aplicando a transformação bilinear a ambos os sistemas [77].

Considere-se, agora que para o processo 1 existe modelação perfeita através do modelo 1, e o processo 2 se define como a interpolação dos parâmetros dos modelos 1 e 2,

$$A'_2(q) = \alpha A_1(q) + (1 - \alpha)A_2 \tag{5.50}$$

$$B'_2(q) = \alpha B_1(q) + (1 - \alpha)B_2 \tag{5.51}$$

Fazendo variar o parâmetro α pode observar-se na figura 5.7 as distâncias de Vinnicombe entre P'_2 e, P_1 e P_2.

Na figura 5.8 representa-se a média do erro de seguimento ao quadrado, na qual se pode observar que este é menor quando o processo P'_2 está próximo (na métrica de Vinnicombe) dos modelos usados no estimador. Quando o parâmetro α define um processo afastado de ambos os modelos ($\alpha < -0.5$ ou $\alpha > 1.2$) surgem situações de instabilidade. Note-se que quando a distância de Vinnicombe é unitária, isso significa que não há garantia do sistema ser estável com esse processo e com o controlador projectado para o modelo nominal mas não é possível *a priori* determinar se esse é instável.

Na figura 5.9 representam-se a soma dos sinais de desempenho num período em que o processo activo é P'_2. Observa-se que o valor de α a que ocorre a mudança de decisão do supervisor, ou seja quando o menor sinal de desempenho deixa de ser π_2 (linha contínua) e passa a ser π_1 (linha ponteada) coincide aproximadamente com o valor de α para o qual se tem $\delta_\nu(P_1, P'_2) = \delta_\nu(P_2, P'_2)$.

Assim, neste exemplo de simulação, o supervisor toma uma decisão que quase coincide com a escolha do modelo com a menor distância de Vinnicombe. Note-se que a escolha do modelo mais próximo não implica a escolha do controlador com melhor desempenho. De facto, pode observar-se que ambos os sinais de desempenho π_1 e π_2 são menores à esquerda de 0.5, o que leva a concluir que o ponto óptimo para a comutação seria para um valor de α superior a 0.5.

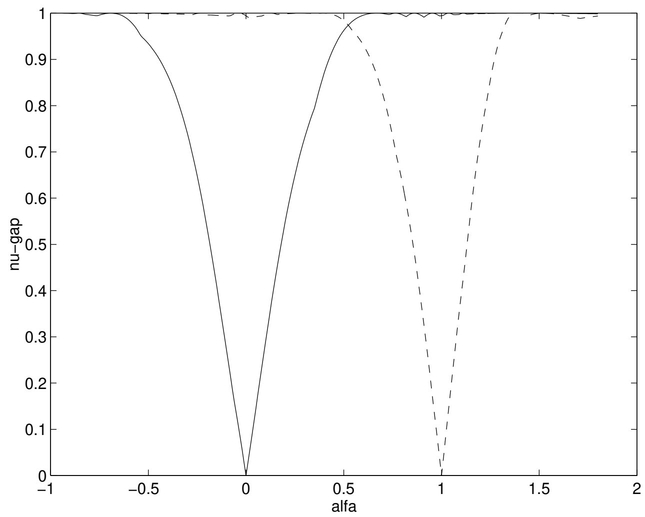

Fig. 5.7: Distâncias de Vinnicombe entre P_1 e P_2' (ponteado), e entre P_2 e P_2' (traço contínuo), em função de α.

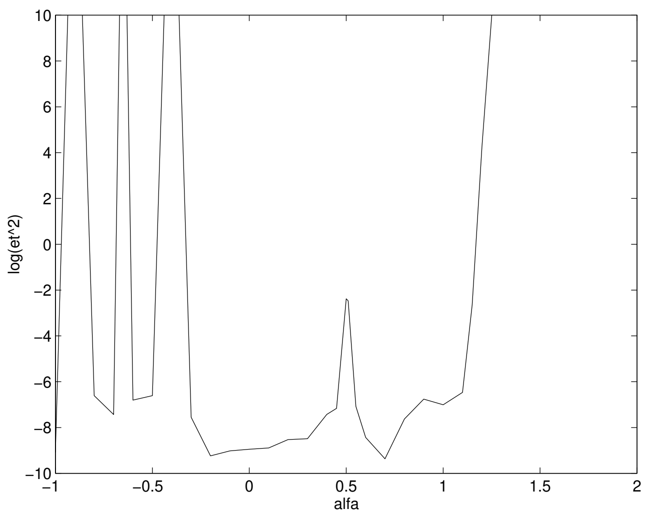

Fig. 5.8: Média do erro de seguimento ao quadrado em função de α, (com a transformação de escala $log(\bar{e}_T^2)$).

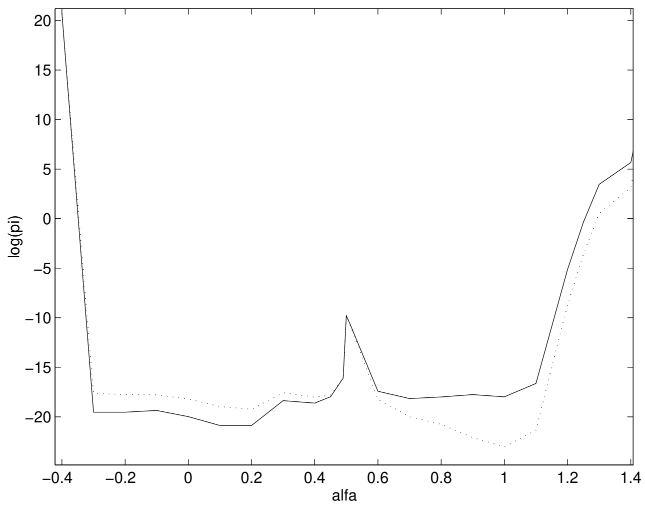

Fig. 5.9: Valor acumulado dos sinais de desempenho em função de α, (com a transformação de escala $log(\bar{\pi}_i^2)$), $\pi_1(\alpha)$ ponteado, $\pi_2(\alpha)$ traço contínuo, num intervalo em que o processo activo é P_2'.

5.3 Conclusões

Neste capítulo os resultados de estabilidade do controlo comutado aplicado a sistemas variáveis no tempo obtidos no capítulo 4 sob a hipótese de modelação perfeita são extendidos considerando a presença de dinâmica não modelada e determina-se uma margem máxima para a incerteza que garanta estabilidade, Teorema 5.1.5. A demonstração do Teorema 5.1.5 baseia-se na aplicação do teorema do ganho pequeno, tendo-se, para o efeito, definido normas ponderadas com um peso exponencial para os sinais. São apresentados resultados de simulação que ilustram a dependência da estabilidade com a descrepância entre os modelos considerados e o processo e relaciona-se essa descrepância com a distância de Vinnicombe entre o processo e os modelos.

Apêndices ao capítulo 5

5.A Demonstração das Proposições 5.1.1, 5.1.2 e 5.1.3

Demonstração da proposição 5.1.1

Por definição

$$\|u(k)\|_{\lambda(k_0,k)} = \sqrt{\sum_{j=k_0}^{k-1} \lambda^{2(k_0-j-1)} u^2(j)} \tag{5.52}$$

$$\|u(k)\|_{\lambda(k_0,k)} \lambda^{k-k_0} \leq \sqrt{\sum_{j=k_0}^{k-1} \lambda^{2(k-j-1)} u^2(j)} \tag{5.53}$$

admitindo que $|u(k)|$ é majorado por u_M, e dado que os termos do somatório são todos positivos

$$\|u(k)\|_{\lambda(k_0,k)} \lambda^{k-k_0} \leq \sqrt{\sum_{j=k_0}^{k-1} \lambda^{2(k-j-1)}}\, u_M \tag{5.54}$$

para o limite de uma série geométrica convergente de razão λ $(0 \leq \lambda < 1)$, tem-se

$$\sum_{j=k_0}^{k-1} \lambda^{2(k-j-1)} \leq \frac{1}{1-\lambda^2} \tag{5.55}$$

assim

$$\|u(k)\|_{\lambda(k_0,k)} \lambda^{k-k_0} \leq \sqrt{\frac{1}{1-\lambda^2}}\, u_M \tag{5.56}$$

donde se tem que $\|u(k)\|_{\lambda(k_0,k)} \lambda^{k-k_0}$ é majorado.

Da Proposição 5.1.1 tem-se imediatamente, no caso discreto, que o um sinal $u(k)$ tem norma ponderada-λ finita sse

$$u(k) \leq \; u_M \, \lambda^{k-k_0} \tag{5.57}$$

como se queria demonstrar.

Demonstração da proposição 5.1.2

Considere-se um sistema linear (eventualmente variável no tempo)

$$x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)u(k) \tag{5.58}$$

$$y(k+1) = C(k)x(k) \tag{5.59}$$

uniformemente exponencialmente estável com decaimento $\lambda_1 < \lambda$, e um sinal de entrada u com norma ponderada-λ finita. De acordo com a proposição 5.1.1 o sinal u é majorado.

Aplicando o Lema 2.3.4 tem-se que o estado tende exponencialmente para zero com decaimento $\lambda = max(\lambda_1, \lambda)$. Assim o sinal de saída também tende exponencialmente para zero com decaimento λ donde, de acordo com a Proposição 5.1.1 y tem norma ponderada-λ finita, como se queria demonstrar.

Demonstração da proposição 5.1.3

Considere-se o estado $x(t)$ de um sistema linear

$$x(t) = \Phi(k_0, k)x(k_0) + \sum_{j=k_0}^{k-1} \Phi(k_0, j+1)B(j)u(j) \tag{5.60}$$

aplicando a norma (euclidiana) a ambos os lados da equação

$$\|x(k)\| \leq \|\Phi(k_0, k)\| \|x(k_0)\| + b \sum_{j=k_0}^{k-1} \|\Phi(k_0, j+1)\| \, |u(j)| \tag{5.61}$$

em que b é um majorante de $\|B(k)\|$. Se o sistema tem norma ponderada-λ finita então de acordo com a Proposição 5.1.2 este é uniformemente exponencialmente estável com decaimento superior a λ. Pela definição de estabilidade exponencial uniforme, tem-se que existem $\gamma > 0$ e $0 \leq \lambda < 1$ tal que

$$\|\Phi(k_0, k)\| \leq \gamma \lambda^{k-k_0} \tag{5.62}$$

substituindo em (5.61)

$$\|x(k)\| \leq \gamma \lambda^{k-k_0} \|x(k_0)\| + b \sum_{j=k_0}^{k-1} \gamma \lambda^{k-j-1} \, |u(j)| \tag{5.63}$$

aplicando a desigualdade de Schwartz

$$\|x(k)\| \leq \gamma \lambda^{k-k_0} \|x(k_0)\| + b\gamma \sqrt{\sum_{j=k_0}^{k-1} \lambda^{2(k-j-1)}} \sqrt{\sum_{j=k_0}^{k-1} \lambda^{2(k-j-1)} \, |u(j)|^2} \tag{5.64}$$

considerando o limite de uma série geométrica convergente ($0 \leq \lambda < 1$), tem-se

$$\sum_{j=k_0}^{k-1} \lambda^{2(k-j-1)} \leq \frac{1}{1-\lambda^2} = C_\lambda \tag{5.65}$$

donde

$$\|x(k)\| \leq \gamma\lambda^{k-k_0}\|x(k_0)\| + b\gamma\sqrt{C_\lambda}\sqrt{\sum_{j=k_0}^{k-1}\lambda^{2(k-j-1)}\,|u(j)|^2} \tag{5.66}$$

pela definição de norma ponderada-λ

$$\|x(k)\| \leq \gamma\lambda^{k-k_0}\|x(k_0)\| + b\gamma\sqrt{C_\lambda}\|u(k)\|_{\lambda(k,k_0)}\lambda^{k-k_0} \tag{5.67}$$

Considere-se a equação de saída

$$y(k) = C(k)x(k) \tag{5.68}$$

donde se obtém

$$\|y(k)\| = \|C(k)\|\,\|x(k)\| \tag{5.69}$$

$$\|y(k)\| \leq c\gamma\lambda^{k-k_0}\|x(k_0)\| + cb\gamma\sqrt{C_\lambda}\|u(k)\|_{\lambda(k,k_0)}\lambda^{k-k_0} \tag{5.70}$$

em que c é um majorante de $\|C(k)\|$. Assim, se $\|u(k)\|_{\lambda(k,k_0)}\lambda^{k-k_0}$ é majorado, $\|y(t)\|$ também é majorado, como se queria demonstrar.

5.B Teorema do ganho pequeno

Segue-se o enunciado do teorema do ganho pequeno [27, 75].

Considere-se um espaço vectorial normado completo (Espaço de Banach) $(l, \|.\|)$constituído por sequências $\{x_1, x_2, x_3, ...\}$ $x_i \in \Re$ e dotado de uma norma $\|.\|$, tal que $\|x\| < \infty$ se $x \in l$.

Definição 5.3.1 *Uma aplicação causal H é l-estável se para $u, y \in l$ e $y = Hu$, existem γ e β reais não negativos, tal que*

$$\|Hu\| \leq \gamma\|u\| + \beta \tag{5.71}$$

para qualquer $u \in l$

Teorema 5.3.1 (Teorema do ganho pequeno) *Considerem-se duas aplicações causais f e g l-estáveis, e as constantes γ_f, β_f, γ_g, e β_g, de acordo com a definição 5.3.1. Se existem γ_f e γ_g tal que $\gamma_f\gamma_g < 1$, então a interconexão dos sistemas representados por f e g, na figura 5.10, é l-estável, e se $u, d \in l$ então $y_f, y_g, e, y \in l$. Tem-se ainda que:*

$$\|e_\tau\| \leq \frac{1}{1-\gamma_f\gamma_g}(\|u_\tau\| + \gamma_g\|d_\tau\| + \beta_g + \beta_f\gamma_g) \tag{5.72}$$

e

$$\|y_\tau\| \leq \frac{1}{1-\gamma_f\gamma_g}(\|d_\tau\| + \gamma_f\|u_\tau\| + \beta_f + \beta_g\gamma_f) \tag{5.73}$$

em que x_τ representa a truncatura de x. Em particular, e dado que $\|x_\tau\| \leq \|x\|$, se $u \in l$ e $d \in l$ então $e, y, y_f, y_g \in l$.

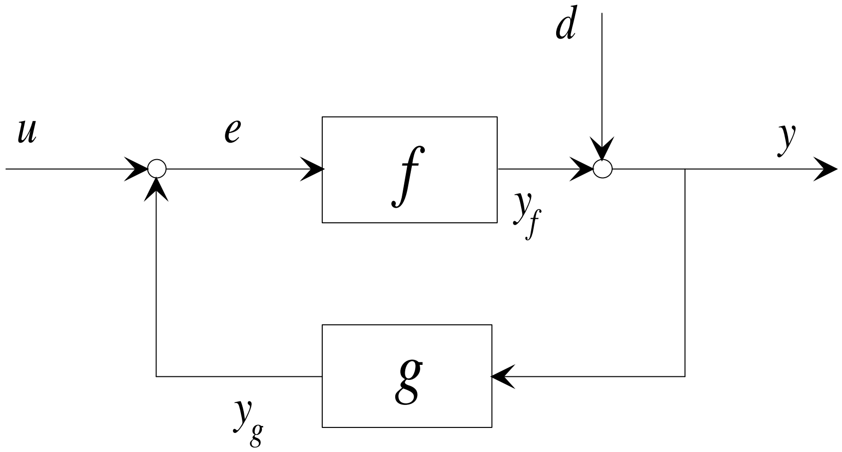

Fig. 5.10: Realimentação dos sistemas f e g.

6. Controlo comutado com supervisão baseada em modelos de Markov

Neste capítulo apresenta-se um algoritmo de supervisão para sistemas estocásticos variáveis no tempo com um modelo linear cujos parâmetros variam de acordo com uma cadeia de Markov, que se supõe ser conhecida a priori.

Consideram-se sistemas estocásticos variáveis no tempo cujas variações dos parâmetros dos parâmetros são descritas de acordo com uma cadeia de Markov, cujo estado (que se assume não estar acessível), é estimado a partir dos sinais da entrada e da saída do processo, por um algoritmo de filtragem não linear. O uso de estimadores de estado partilhado torna natural a implementação de controladores comutados com este supervisor.

6.1 Introdução

Os supervisores considerados na literatura [45, 54] assumem que os parâmetros que definem a dinâmica dos sistema são desconhecidos mas, não exploram qualquer tipo de conhecimento *a priori* sobre a forma como esses parâmetros transitam entre os diversos valores admitidos.

No entanto, existem situações em que as mudanças no processo ocorrem (aproximadamente) em sequência, ou processos com estados mais prováveis do que outros. Pode dar-se o exemplo dum campo de colectores solares distribuídos, no qual a passagem de uma nuvem força o processo a atravessar uma série de comportamentos diferentes, que sucedem aproximadamente em sequência.

Nesta tese assume-se que o conjunto dos parâmetros que definem o comportamento dinâmico do sistema, é a saída de um processo de Markov [6, 9, 25] com transições esparsas, ou seja, um processo de Markov que funciona numa escala de tempo que é

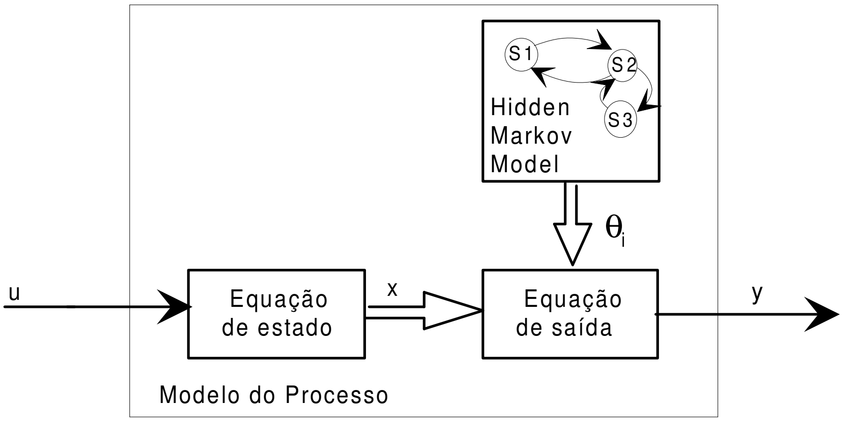

Fig. 6.1: Modelo do processo baseado em HMMs.

muito mais lenta do que os transitórios do sistema, figura 6.1.

O estado desta cadeia de Markov não está acessível por uma observação directa, e pode apenas ser estimado a partir dos sinais de entrada e saída do processo. Tem-se, assim, um problema que se enquadra nas Cadeias de Markov Escondidas[1](*HMM - Hidden Markov Model*) [33]. Alguns problemas relacionados com este foram abordados por autores que tratavam de problemas de estimação e detecção para sistemas com variações súbitas [5, 7, 20, 60, 74] mas sem o enquadrarem no problema de controlo baseado em modelos múltiplos.

6.2 Formulação do problema

Considere-se um sistema discreto no tempo representado pelo modelo ARMAX dado por

$$A(q)y(k) = B(q)u(k) + C(q)\eta(k) \tag{6.1}$$

onde A, B, C são polinómios no operador avanço q, tal que A, e B não têm factores comuns instáveis, C é Hurwitz, e $\partial A = \partial C = n > \partial B = m$, em que ∂X designa o grau do polinómio X. Os sinais u e y são, respectivamente, a entrada e a saída do sistema, e η é uma sequência gaussiana incorrelacionado de média nula. Assume-se que C é um polinómio conhecido (que se pode interpretar em termos de polinómio observador) e, A e B são seleccionados de uma família (definida *a priori*) de parâmetros possíveis do processo. $\mathcal{P} = \{A_i, B_i, i = 1, ..., N\}$

[1]Na literatura científica Portuguesa associada ao processamento de voz usa-se a expressão "não observáveis". No âmbito da teoria de controlo esta expressão induz em erro pelo que se adopta pela expressão "escondidas"

6.2.1 Realização com estado partilhado

Considere-se um modelo do processo na forma de estado partilhado, tal como definido no Capítulo 3, este tem a forma

$$x(k+1) = A_{2E}x(k) + b_{E1}y(k) + b_{E2}u(k) \tag{6.2}$$

$$y(k) = \theta_j' x(k) + \eta(k) \tag{6.3}$$

em que, $\eta(k)$ é uma sequência gaussiana de média nula, as matrizes A_{2E}, b_{E1} e b_{E2} são independentes dos coeficientes dos polinómios A e B, $\theta' = [c_1 - a_1 ... c_n - a_n \quad b_0 ... b_m]$ e a_i, b_j, c_i, $i = 1, ..., n$ $j = 1, \ldots, m$ são os coeficientes dos polinómios A, B and C.

Os parâmetros do processo dependem, assim, do estado (não acessível) de uma cadeia de Markov, como se representa na figura 6.1. A realização de estado partilhado permitiu estabelecer uma relação linear entre a saída do processo $y(k)$ e os parâmetros. Isto será crucial para os algoritmos que se consideram a seguir.

6.2.2 Cadeia de Markov da dinâmica do processo

Admite-se que, em cada instante de tempo t o valor de θ, que representa a dinâmica do processo, é dado pelo estado de uma cadeia de Markov finita, com estados $S_i, i = 1, ..., N$. Quando o estado da cadeia de Markov está em S_i, o vector, θ, que determina a dinâmica do processo assume o valor θ_i.

Seja $P(k) \triangleq [P_1(k) ... P_N(k)]'$ o vector das probabilidades *a priori* dos estados da cadeia de Markov no instante t, *i.e.* $P_i(k)$ representa a probabilidade que o estado da cadeia de Markov esteja no estado S_i no instante t sem que sejam feitas quaisquer observações. Seja $A_M = [a_{ij}]$ a matriz (N×N) das transições de estado[2] *i.e.*, tal que

$$P(k) = A_M P(k-1) \tag{6.4}$$

Nesta tese, parte-se do princípio que A_M é conhecido. Os métodos aqui apresentados podem ser complementados por um algoritmo de estimação de A_M em linha [61].

O problema que se pretende resolver nesta tese é decidir, em cada instante de tempo t, com base nas observações disponíveis dos sinais de entrada e saída, qual é o modelo (correspondente a um estado da cadeia de Markov) mais provável no conjunto dos modelo admitidos $\mathcal{P}$. O resultado desta decisão é usado para seleccionar o controlador que se aplica ao processo.

[2] Note-se que, na literatura sobre processos estocásticos, a actualização do vector das probabilidades da cadeia de Markov é frequentemente representada por $P_k = P_{k-1}A$, em que P é um vector linha. Desse modo, neste capítulo trabalha-se com $A_M = A'$

Como se viu no Capítulo 4 para se garantir a estabilidade do processo controlado é necessário garantir que as mudanças na dinâmica do processo são suficientemente lentas. Uma vez que a dinâmica do processo muda de acordo com um processo de Markov, está excluída à partida a hipótese de limitar inferiormente (de forma determinística) o intervalo entre comutações da dinâmica ou seja, não existe um tempo de permanência para o processo. Deste modo procede-se ao cálculo do valor médio entre mudanças de dinâmica.

Considere-se o valor médio do tempo de permanência do processo $\overline{T_{Dp}}$ em função da probabilidade conjunta,

$$\overline{T_{Dp}} = E[T_{Dp}] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} T_{Dp}\, p_{T\lambda}(T_{Dp}, \lambda)\, dT_{Dp}\, d\lambda \tag{6.5}$$

Dado que o processo é discreto no tempo ($T_{Dp} \in N$) e o número de estados λ_p é finito com $p \in \mathcal{P}$, a função densidade de probabilidade $p_{T\lambda}$ define-se por

$$p_{T\lambda}(T_{Dp}, \lambda) = \sum_{j \in \mathcal{P}} \sum_{i=1}^{\infty} P_{T\lambda}(i, \lambda_j)\delta(i - T_{Dp})\delta(\lambda_j - \lambda) \tag{6.6}$$

em que $P_{T\lambda}(i, \lambda_j)$ é a probabilidade de, para o estado λ_i, haver uma sequência de i estados iguais. Substituindo em (6.5) e aplicando as propriedades do delta de Dirac,

$$\overline{T_{Dp}} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{\infty} i\, P_{T\lambda}(i, \lambda_j) \tag{6.7}$$

a probabilidade das sequências $P_{T\lambda}(i, \lambda_j)$ vem definida por

$$P_{T\lambda}(i, \lambda_j) = P(\lambda \neq \lambda_j, \underbrace{\lambda_j, \lambda_j, ..., \lambda_j}_{i}) \tag{6.8}$$

em que $P(\lambda_i|\lambda_j)$ significa a probabilidade de o estado ser λ_i (num instante k) dado que o estado anterior foi λ_j (no instante $k-1$), e $P(\lambda \neq \lambda_j, \lambda_j, \lambda_j, ..., \lambda_j)$ significa a probabilidade de o estado ser diferente de λ_j no instante k, ser igual a λ_j para os instantes de $k-1$, $k-2$, $k-3$, etc. Por simplificação de notação, os estados com os índices referentes aos instantes de tempo omitiram-se sempre que possível. Aplicando a lei de Bayes,

$$P_{T\lambda}(i, \lambda_j) = P(\lambda(k) \neq \lambda_j|\lambda_j)P(\underbrace{\lambda_j, \lambda_j, ..., \lambda_j}_{i-1}) \tag{6.9}$$

Como $P(\lambda(k) = \lambda_j|\lambda_j) + P(\lambda \neq \lambda_j|\lambda_j) = 1$, então

$$P_{T\lambda}(i, \lambda_j) = (1 - P(\lambda_j|\lambda_j))P(\underbrace{\lambda_j, \lambda_j, ..., \lambda_j}_{i-1}) \tag{6.10}$$

Aplicando sucessivamente a lei de Bayes obtém-se

$$P_{T\lambda}(i,\lambda_j) = (1 - P(\lambda_j|\lambda_j))\underbrace{P(\lambda_j|\lambda_j)...P(\lambda_j|\lambda_j)}_{i-1}P(\lambda_j) \tag{6.11}$$

$$P_{T\lambda}(i,\lambda_j) = (1 - P(\lambda_j|\lambda_j))P(\lambda_j|\lambda_j)^{i-1}P(\lambda_j) \tag{6.12}$$

de acordo com a definição da matriz A_M, $a_{jj} = P(\lambda_j|\lambda_j)$, donde

$$P_{T\lambda}(i,\lambda_j) = (1 - a_{jj})a_{jj}^{i-1}P(\lambda_j) \tag{6.13}$$

Substituindo em 6.7,

$$\overline{T_{Dp}} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{\infty} i\,(1 - a_{jj})a_{jj}^{i-1}P(\lambda_j) \tag{6.14}$$

$$\overline{T_{Dp}} = \sum_{j=1}^{n}(1 - a_{jj})P(\lambda_j)\sum_{i=1}^{\infty} i\,a_{jj}^{i-1} \tag{6.15}$$

no apêndice 6.A demonstra-se que se tem para o somatório

$$\sum_{i=1}^{\infty} i\,a_{jj}^{i-1} = \frac{1}{(1 - a_{jj})^2} \tag{6.16}$$

donde se tem,

$$\overline{T_{Dp}} = \sum_{j=1}^{n}(1 - a_{jj})P(\lambda_j)\frac{1}{(1 - a_{jj})^2} = \sum_{j=1}^{n}\frac{P(\lambda_j)}{1 - a_{jj}} \tag{6.17}$$

Tome-se para os valores de $P(\lambda_j)$ as probabilidades da distribuição de equilíbrio associada à cadeia de Markov ou seja, o valor de equilíbrio da equação $P_{k+1} = A_M P_k$. É, assim, necessário averiguar A_M^k quando $k \to \infty$.

Sobre as matrizes não negativas podem aplicar-se os Teoremas de Perron-Frobenius [6, 9, 25]. Defina-se uma matriz *regular*, como uma matriz A com entradas não negativas, se existe k tal que A^k tem todas as entradas estrictamente positivas.

Teorema 6.2.1 (Perron-Frobenius [25], teoremas 1.8-1.10, pág. 51) *Dada uma matriz A regular com valores próprios λ_i ordenados de acordo com*

$$\lambda_1 > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq ... \tag{6.18}$$

com multiplicidade m_i associada ao valor próprio λ_i, e sejam u_1, v_1 vectores próprios esquerdos e direitos de A associado a λ_1 tal que $u_1'v_1 = \lambda_1$então

- *λ_1 tem multiplicidade 1*

- *u_1 e v_1 são únicos*

- $A^k = \lambda_1^k v_1 u_1' + O(k^{m_2-1}|\lambda_2|^k)$

em que $O(x)$ designa um infinitésimo de ordem superior a x.

Para o caso particular de matrizes de Markov (que têm a soma das colunas igual a 1) tem-se ainda que[3]

- $u_1 = [1\ 1\ 1\ ...1]$

- $\lambda_1 = 1$

- $A^k = v_1 u_1' + O(k^{m_2-1}|\lambda_2|^k)$

Deste modo, A^k converge para $v_1 u_1'$ que é uma matriz com colunas iguais. Isto significa que o vector das probabilidades $P(k)$,

$$P(k) = A_M P(k-1) = A_M^k P(0) \tag{6.19}$$

converge para um valor independente do valor inicial $P(0)$,

$$\lim_{k\to\infty} P(k) = v_1 [1\ 1\ 1\ ...1]' P(0) = v_1 \tag{6.20}$$

que se denomina por *distribuição de equilíbrio associada à cadeia de Markov.* Assim, em (6.17), $P(\lambda_j) = v_{1j}$, substituindo obtém-se

$$\overline{T_{Dp}} = \sum_{j=1}^{n} \frac{v_{1j}}{1 - a_{jj}} \tag{6.21}$$

que permite calcular explicitamente o tempo de permanência médio do processo $\overline{T_{Dp}}$ em função da matriz das transições de Markov A_M. No caso em que se imponha aos elementos da diagonal principal, $a_{jj} \geq \bar{a}$, tem-se

$$\overline{T_{Dp}} \geq \sum_{j=1}^{n} \frac{v_{1j}}{1-\bar{a}} = \frac{1}{1-\bar{a}} \sum_{j=1}^{n} v_{1j} \tag{6.22}$$

dado que a soma das probabilidades em cada estado é unitária (em qualquer instante), em particular para a distribuição de equilíbrio também se tem que $\sum_{j=1}^{n} v_{1j} = 1$. Assim,

$$\overline{T_{Dp}} \geq \frac{1}{1-\bar{a}} \tag{6.23}$$

[3]Observa-se trivialmente que se a soma das colunas de A_M é 1, então $[1\,1 \ldots 1]A_M = [1\,1 \ldots 1]$ donde $\lambda_1 = 1$ é o valor próprio associado ao vector próprio esquerdo $[1\,1 \ldots 1]$

Note-se que em [23] se relaxam as condições que garantem a estabilidade exponencial de sistemas contínuos lineares comutados, de um tempo de permanência fixo para um tempo de permanência médio.

Aplicando o mesmo princípio deverá ser possível do resultado anterior assegurar a estabilidade de um sistema com controlo comutado num processo discreto cuja dinâmica varia de acordo com um processo de Markov desde que A_M garanta um tempo de permanência médio $\overline{T_{Dp}}$ suficientemente elevado. Isto equivale a relaxar as condições do Teorema 4.5.1 de um tempo de permanência T_{Dp} para um tempo de permanência médio $\overline{T_{Dp}}$.

6.3 Supervisor

Para o modelo do processo baseado nas cadeias de Markov obtém-se um supervisor através de técnicas de filtragem não linear, as quais têm em conta a dinâmica da transição entre os modelos (estados da cadeia de Markov).

6.3.1 Supervisor - filtragem não linear

Seja $P_i(k-1), i = 1, ..., N$ a probabilidade de que a cadeia de Markov se encontre no estado S_i no instante de tempo $t-1$, dadas as observações até ao instante $t-1$, $\mathcal{O}_{t-1}$, e seja $P_j(k|t-1)$ a probabilidade do estado S_j no instante de tempo t, dadas as observações até ao instante $t-1$.

Tal como se mostra no apêndice 6.B, usando a lei de Bayes e técnicas standard de filtragem não linear, estas probabilidades são propagadas recursivamente no tempo, pelas seguintes operações:

A)*Predição*

$$P_j(k|t-1) = \sum_{i=1}^{N} a_{ij} P_i(k-1) \quad j = 1, ..., N \tag{6.24}$$

B)*Filtragem*

$$P_j(k) = k_t C_\eta \exp[-\frac{(y_t - x'(k)\theta_j)^2}{\sigma_\eta^2}] P_j(k|t-1) \tag{6.25}$$

A figura 6.2 disponibiliza um interpretação deste algoritmo. A probabilidade prevista para o estado S_j, para cada $j = 1, ..., N$, recebe contribuições de todos os estados. A contribuição do estado genérico S_i é a probabilidade da transição de S_i para S_j (ou seja a_{ij}) pesada pela probabilidade $P_i(k-1)$. A operação de filtragem "corrige" a predição

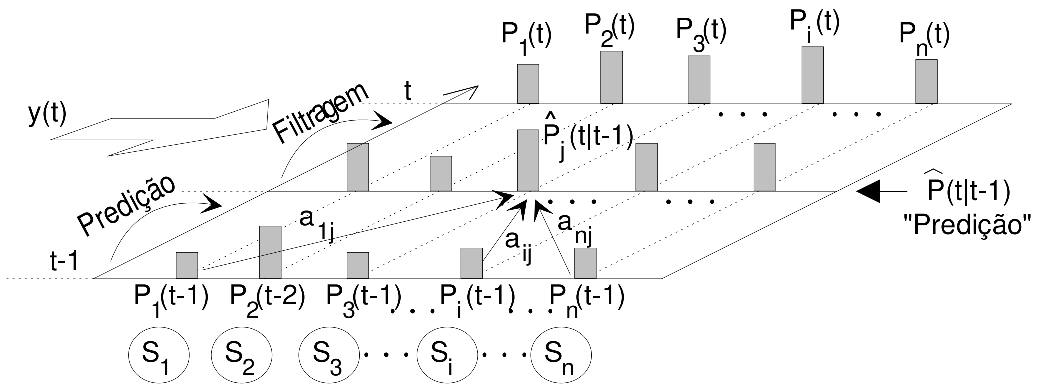

Fig. 6.2: Interpretação do algoritmo de estimação do estado da cadeia de Markov.

das probabilidades usando a última observação, o que corresponde a uma multiplicação elemento a elemento dada por (6.25).

6.3.2 Supervisor subóptimo

Defina-se a seguinte função de "mérito"

$$M(k) \stackrel{\Delta}{=} k_t C_\eta diag(\exp[-\frac{(y(k) - x^{'}(k)\theta_i)^2}{\sigma_\eta^2}]) \tag{6.26}$$

As equações (6.24) e (6.25) podem ser escritas em conjunto na forma matricial, como

$$P(k) = M(k) A_M P(k-1) \tag{6.27}$$

Dado que, em geral, M e A_M não comutam, não é possível agrupar, e separar, todas as operações de predição e filtragem. Existem, no entanto, dois casos particulares, para os quais se pode fazer a seguinte análise.

Caso 1 Matriz das transições de estado da cadeia de Markov $A_M = I$.

Neste caso, o modelo de Markov corresponde a um processo que não transita entre os estados, ou seja, o modelo do processo que está activo é desconhecido mas constante. Assim, cada $\theta_i, i = 1, ..., N$ é caracterizado por uma probabilidade *a priori* P_{io}. Nestas condições, as probabilidades *a posteriori* para cada estado, são dadas por

$$P_i(k) = \Pi_{\tau=1}^{t}(k_\tau C_\eta \exp[-\frac{(y_(\tau) - x^{'}(k)\theta_i)^2}{\sigma_\eta^2}] P_{io}) \tag{6.28}$$

Defina-se o erro de predição do modelo preditivo de índice i

$$e_i(k) \stackrel{\Delta}{=} y(k) - x^{'}(k)\theta_i \qquad i = 1, ..., N \tag{6.29}$$

e tome-se o logaritmo em (6.28), de modo a obter-se

$$\log P_i(k) = \sum_{\tau=1}^{t} [\log k_\tau + \log C_\eta - \frac{1}{\sigma_\eta^2} e_i^2(\tau) + \log P_{io}] \tag{6.30}$$

Dado que $\log k_\tau$ e $\log C_\eta$ não dependem de i, a escolha do modelo com a probabilidade mais elevada, com este algoritmo, é equivalente a seleccionar o modelo que corresponde à menor norma euclidiana do erro, corrigida pelas probabilidades *a priori*. Assim definindo o sinal de desempenho $\overline{\pi}_i(k) = \log P_i(k)$, tem-se

$$\overline{\pi}_i = \sum_{j=k_0}^{k} e_i^2(j) - \log P_{io} \tag{6.31}$$

Este é o critério usado em [45], e apresentado nos capítulos anteriores para sistemas determinísticos, onde se assume que o processo é constante (apesar de ser desconhecido), e onde *a priori* se consideram que todos os modelos são equiprováveis.

Caso 2 Matriz das transições de estado da cadeia de Markov A_M com entradas todas iguais.

Neste caso, o modelo de Markov corresponde a um processo em que o vector dos parâmetros θ no instante k é incorrelacionado com θ nos instantes anteriores. Deste modo a informação passada não é útil para estimar o estado actual do processo. Dada a matriz A_M, de dimensão $n \times n$, definida por

$$A_M = \begin{bmatrix} \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} \end{bmatrix} \tag{6.32}$$

então, para qualquer $P(k)$

$$A_M\, P(k) = [\frac{1}{n}\,\frac{1}{n} \dots \frac{1}{n}]' \tag{6.33}$$

Assim, tem-se

$$P(k) = M(k)\,[\frac{1}{n}\,\frac{1}{n} \dots \frac{1}{n}]' \tag{6.34}$$

donde

$$P_i(k) = (k_\tau C_\eta \exp[-\frac{(y_(\tau) - x^{'}(k)\theta_i)^2}{\sigma_\eta^2}]) \tag{6.35}$$

Tome-se o logaritmo em (6.35), de modo a obter-se

$$\log P_i(k) = [\log k_\tau + \log C_\eta - \frac{1}{\sigma_\eta^2} e_i^2(k)] \tag{6.36}$$

Definindo o sinal de desempenho $\overline{\pi}_i(k) = \log P_i(k)$, tem-se

$$\overline{\pi}_i(k) = e_i^2(k) \tag{6.37}$$

Ou seja, só a observação feita no instante k é relevante para a estimação do estado da cadeia de Markov. Comparando com os sinais de desempenho usados no Capítulo 4,

$$\pi_i(k) = \lambda_\pi \pi_i(k-1) + e_i^2(k) \tag{6.38}$$

tem-se um avaliador de desempenho com $\lambda_\pi = 0$.

Em [60] analisa-se a convergência deste estimador aproximando a função de "mérito" $M(k)$, a qual é definida por (6.26) sobre os sinais estocásticos dos erros de estimação, por funções determinísticas $\bar{M}(k)$ constantes ou seja, admitindo que o vector de parâmetros permanece constante. Este pode ser considerado um primeiro passo para analisar o caso estocástico com as funções de mérito $M(k)$. As funções determinísticas $\bar{M}(k)$ constantes, aproximam o "mérito" médio de cada modelo (admitindo que o processo varia muito lentamente). Sob essas hipóteses, não basta que a função de mérito do modelo correcto seja a maior, para assegurar a convergência para o modelo correcto, sendo necessário que [60],

$$\bar{M}_j > \bar{M}_i \frac{1 + n(1 - \bar{a})}{\bar{a}} \qquad com \;\; i \neq j \tag{6.39}$$

em que $\bar{M}_j$ é a j-*ésima* função de mérito, e n o número de modelos admitidos. Esta condição pode interpretar-se do seguinte modo - quanto mais próximas forem as funções de mérito $\bar{M}_j$ mais improvável tem de ser a comutação entre modelos ou seja, mais próximos da unidade têm de ser os valores da diagonal principal de A_M.

Nesta secção conclui-se que o supervisor definido nos capítulos 3 e 4 é aplicável a processos variáveis no tempo, com a variação da dinâmica descrita por um processo de Markov. Bastando para tal garantir que o tempo de permanência médio (que é função da matriz de Markov) é suficientemente grande. Este caso é comparado em seguida por simulação com um supervisor baseado nos modelos de Markov.

6.4 Exemplos de simulação

Nesta secção apresentam-se alguns resultados de simulação, nos quais o supervisor acima definido é utilizado para comutar entre controladores, num processo variável no tempo. Nos resultados apresentados o custo acumulado é definido por $J_{acc}(k) \triangleq \sum_{i=1}^{t} y^2(i)$

6.4.1 Exemplo 1

Assume-se um processo de segunda ordem, modelado por uma equação às diferenças, com parâmetros variáveis no tempo:

$$y(k+1) - a(\lambda(k))y(k) + 0.7y(k-1) = u(k) - 0.5u(k-1) + \eta(k+1)$$

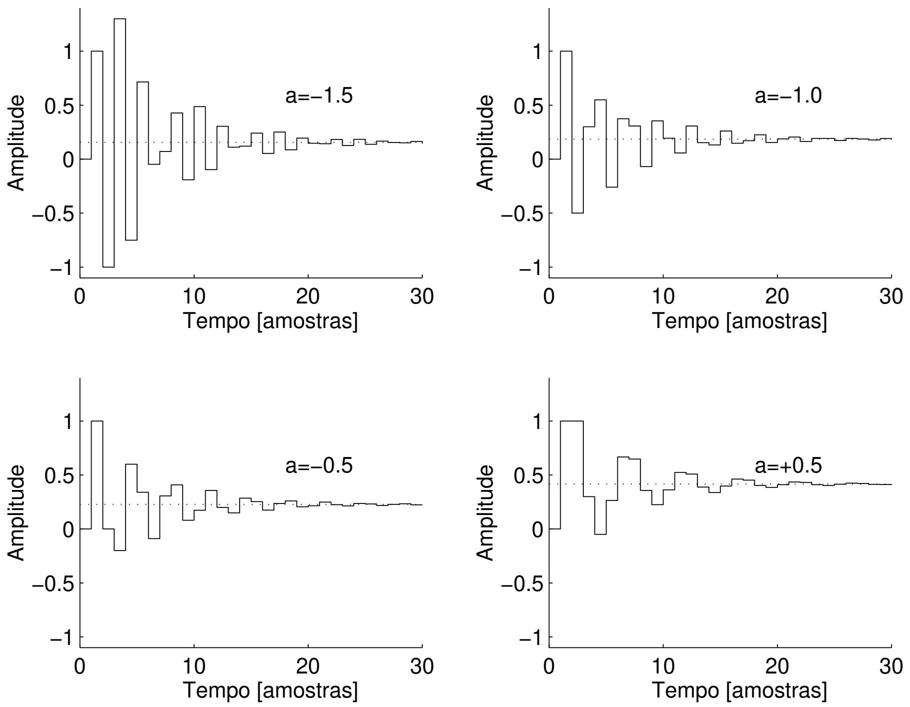

Fig. 6.3: Exemplo 1 - resposta impulsiva dos modelos locais.

O coeficiente a é uma função do estado $\lambda(k)$ da cadeia de Markov com $N = 4$ estados, e que tomam o seguintes valores:

- $a(\lambda_1) = -1.5$
- $a(\lambda_2) = -1.0$
- $a(\lambda_3) = -0.5$
- $a(\lambda_4) = +0.5$

A resposta impulsiva de cada um dos modelos locais mostra-se na figura 6.3.

Para cada processo resultante de substituir o parâmetro $a(\lambda)$ no modelo ARMAX, projecta-se um controlador de variância mínima (baseado na complexidade completa do modelo correspondente). Este controlador é aplicado ao processo de acordo com um mecanismo de comutação com tempo de permanência (*dwell-time*). A transição entre estados da cadeia de Markov pode ocorrer a cada 10 amostras, sendo a matriz de transição dos estados dada por

$$A_M = \begin{bmatrix} 0.98 & 0.01 & 0.00 & 0.00 \\ 0.02 & 0.98 & 0.01 & 0.00 \\ 0.00 & 0.01 & 0.94 & 0.02 \\ 0.00 & 0.00 & 0.05 & 0.98 \end{bmatrix}$$

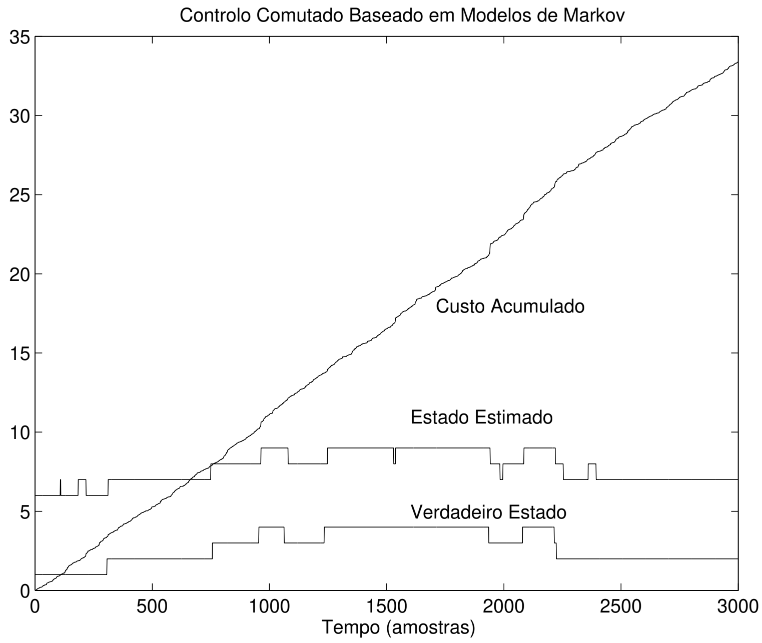

Fig. 6.4: Exemplo 1 - comutação com HMM.

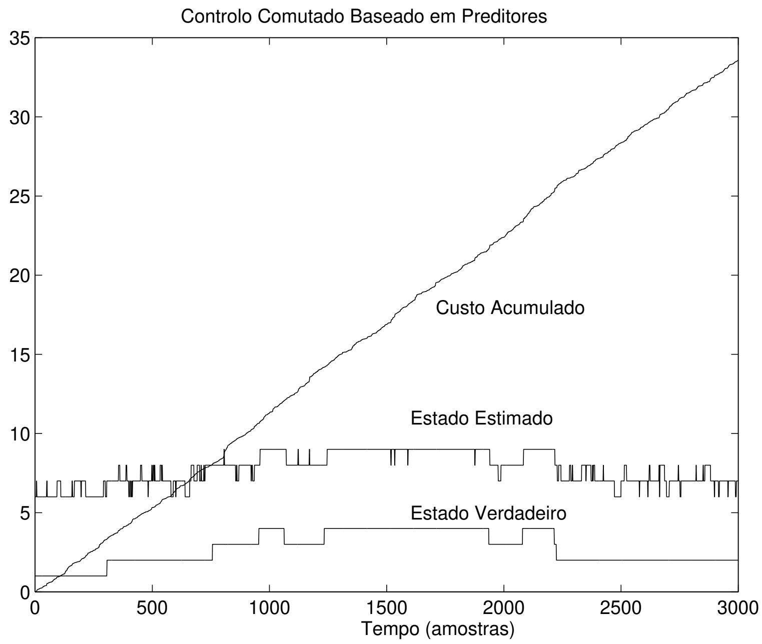

Fig. 6.5: Exemplo 1 - Supervisor baseado nos erros dos modelos preditivos.

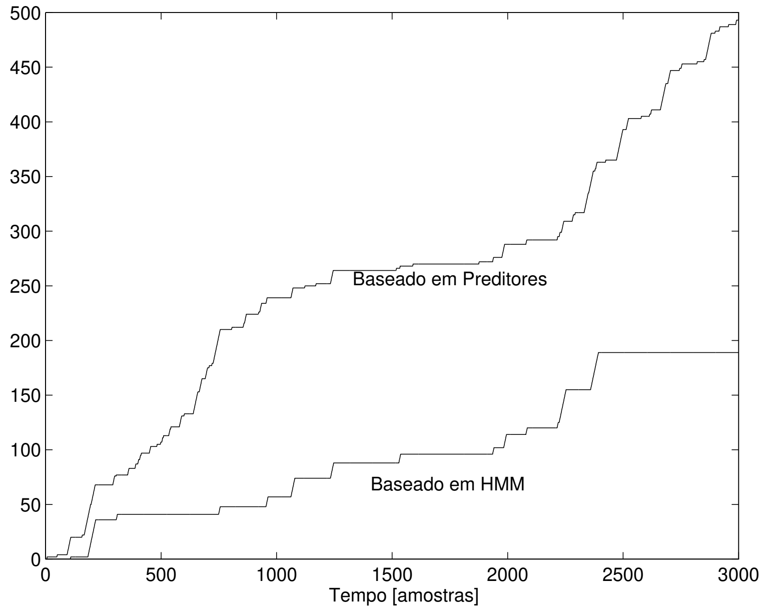

Fig. 6.6: Exemplo 1 - Erros acumulados.

que tem como distribuição de equilíbrio

$$P_{eq} = [0.1715 \;\; 0.3430 \;\; 0.3430 \;\; 0.8575]' \tag{6.40}$$

e de (6.21) tem-se um tempo de permanência médio $\overline{T_{Dp}} = 74.31$.

A figura 6.4 mostra os resultados obtidos numa simulação com o supervisor baseado em HMMs e a figura 6.5 mostra um simulação com o supervisor baseado na norma euclidiana dos erros de predição (O índice do estado estimado é mostrado adicionado de 5 por uma questão de clareza de apresentação). Uma vez que esta última estratégia não tem em consideração o modelo (de Markov) da transição de estados, os erros na estimação do estado (saída do supervisor) são superiores aos do primeiro caso, como esperado. A diferença no desempenho do supervisor nos dois casos pode observar-se na figura 6.6, onde se mostram as sequências de erros acumulados para ambos os supervisores.

6.4.2 Exemplo 2

No exemplo 2 ilustra-se a fase de aquisição do supervisor. Considera-se o mesmo processo do exemplo 1 mas, o parâmetro a pode agora assumir $N = 15$ valores, dados por

$$a(\lambda_i) = -(0.5 + 0.1(i-1)) \quad i = 1, \ldots, 15$$

e a matriz das transições do estado é dada por $A_M = 0.9I + \overline{A}$ onde I é a matriz identidade de dimensão 15 e

$$\overline{A}(i,\, i-1) = \overline{A}(i, i+1) = 0.05 \quad 1 < i < 15$$

$$\overline{A}(1,2) = \overline{A}(14,15) = 0.1 \quad i = 1,\, 15$$

O estado estimado da cadeia de Markov (HMM) é inicializado no estado 1, e o verdadeiro estado do processo é inicializado a 10. A figura 6.7 mostra a evolução no tempo do estado (das probabilidades estimadas) do HMM, em conjunto com o verdadeiro estado (em *tracejado*) e com a decisão do supervisor, para as primeiras 50 amostras, com um estado inicial para $P(k)$ que admite que o modelo correcto é o 1. Na figura 6.8 mostra-se a evolução do mesmo supervisor com condições iniciais que admitem igual probabilidade para todos os modelos.

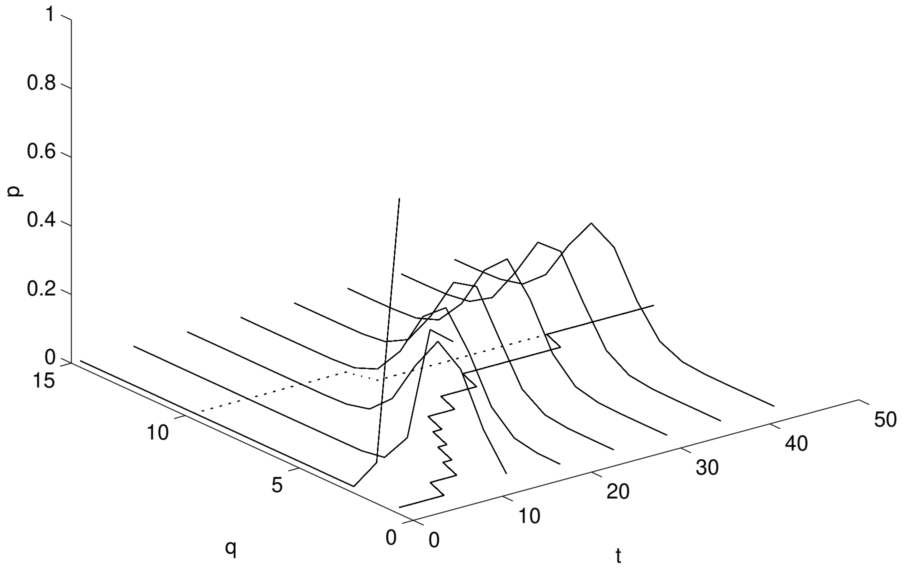

Fig. 6.7: Exemplo 2 - probabilidades dos estados do HMM; estado estimado e verdadeiro estado do processo com condições iniciais $P(0) = [0\,0 \ldots 0\,1]'$.

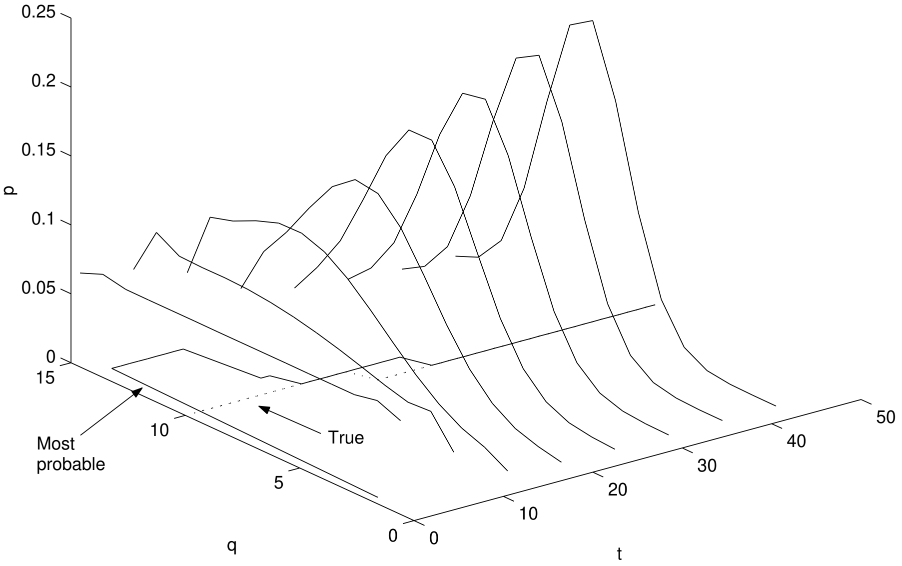

Fig. 6.8: Exemplo 2 - probabilidades dos estados do HMM; estado estimado e verdadeiro estado do processo com condições iniciais $P(0) = [1/n \; 1/n \ldots 1/n]'$.

6.5 Conclusões

Neste capítulo propõe-se um algoritmo de controlo comutado aplicado a sistemas lineares cuja variação é descrita por modelos de Markov escondidos. No algoritmo proposto o conhecimento *a priori* sobre a matriz de Markov é usado para modificar o avaliador de desempenho dos diversos modelos. Apresentam-se resultados de simulação que confirmam um desempenho superior deste algoritmo face ao algoritmo considerado nos dos capítulos 3, 4 e 5, o qual não permite incorporar a informação disponível *a priori* sobre a variação do processo. Da aplicação dos resultados do capítulo 4, e da análise da classe de processos considerada neste capítulo confirma-se ainda a estabilidade do controlo comutado *standard*, aplicado a sistemas variáveis descritos pelos modelos de Markov Escondidos, desde que o tempo de permanência médio (função da matriz de Markov) seja suficientemente elevado.

Apêndices ao capítulo 6

6.A Demonstração da equação (6.16)

Considere-se o desenvolvimento em série de Taylor de $\frac{1}{(1-x)^2}$. Para uma função $f(x)$, tem-se

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2!} + f'''(0)\frac{x^3}{3!} + ... \tag{6.41}$$

as derivadas de $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$, vêm dadas por

$$f'(x) = \frac{2}{(1-x)^3} \tag{6.42}$$

$$f''(x) = \frac{2.3}{(1-x)^4} \tag{6.43}$$

para a derivada de ordem n

$$f^{(n)}(x) = \frac{(n+1)!}{(1-x)^{n+2}} \tag{6.44}$$

assim, tem-se o seguinte desenvolvimento em série de Taylor em torno da origem

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3!\frac{x^2}{2!} + 4!\frac{x^3}{3!} + ... + (n+1)!\frac{x^n}{n!} + ... \tag{6.45}$$

ou seja

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + ... + (n+1)x^n + ... \tag{6.46}$$

como se queria demonstrar.

6.B Demonstração das equações (6.24) e (6.25)

Seja $p(\lambda_t|\mathcal{O}_t)$ a função densidade de probabilidade (f.d.p.) do estado da cadeia de Markov no instante t, λ_t, dadas as observações $\mathcal{O}_t$ até ao instante t. Tal como se mostra no apêndices 6.C e 6.D, usando as leis de Bayes, $p(\lambda_t|\mathcal{O}_t)$ propaga-se recursivamente no tempo usando as operações de filtragem não linear:

1. *Predição*

$$p(\lambda_t|\mathcal{O}_{t-1}) = \int_{-\infty}^{\infty} p(\lambda_t|\lambda_{t-1})p(\lambda_{t-1}|\mathcal{O}_{t-1})d\lambda_{t-1} \tag{6.47}$$

2. *Filtragem*

$$p(\lambda_t|\mathcal{O}_t) = k_t p(y_t|\lambda_t)p(\lambda_t|\mathcal{O}_{t-1}) \tag{6.48}$$

Em que, k_t é uma constante de normalização tal que

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(\lambda_t|\mathcal{O}_t)d\lambda_t = 1$$

Seja

$$p(\lambda_{t-1}|\mathcal{O}_{t-1}) = \sum_{i=1}^{N} P_i(k-1)\delta(\lambda_{t-1} - S_i) \tag{6.49}$$

onde $\delta(.)$ é a função delta de Dirac. Substituindo (6.49) em (6.47) e usando as propriedades do delta de Dirac, obtém-se

$$p(\lambda_t|\mathcal{O}_{t-1}) = \sum_{i=1}^{N} P_i(k-1)p(\lambda_t|\lambda_{t-1} = S_i) \tag{6.50}$$

A equação que define a transição de estado da cadeia de Markov pode ser escrita como

$$p(\lambda_t|\lambda_{t-1} = S_i) = \sum_{j=1}^{N} a_{ij}\delta(\lambda_t - S_j) \tag{6.51}$$

e substitua-se em (6.50) de modo a obter-se, por troca de parcelas

$$p(\lambda_t|\mathcal{O}_{t-1}) = \sum_{j=1}^{N}(\sum_{i=1}^{N} a_{ij}P_i(k-1))\delta(\lambda_t - S_j) \tag{6.52}$$

O que significa que a probabilidade $P_j(k|t-1)$ do estado S_j no instante t, dadas as observações até ao instante $t-1$ é dada pela equação (6.24).

Considere-se a operação de filtragem (6.48). Quando a cadeia de Markov está no estado S_i, as observações são feitas de acordo com a equação (6.3). Seja a f.d.p. de $\eta(k)$ gaussiana

$$p_\eta(\alpha) = C_\eta \exp(-\frac{\alpha^2}{\sigma_\eta^2}) \tag{6.53}$$

com C_η e σ_η constantes. Então,

$$p(y_t|\lambda_t = S_i) = C_\eta \exp[-\frac{1}{\sigma_\eta^2}(y - x^T(k)\theta_i)^2]|_{y=y(k)} \tag{6.54}$$

Combinando (6.48) e (6.54), para $j = 1, ..., N$, obtém-se a equação (6.25).

6.C Demonstração da equação (6.47)

Pelas propriedades da f.d.p.,

$$p(\lambda_t|\mathcal{O}_{t-1}) = \int_{-\infty}^{\infty} p(\lambda_t, \lambda_{t-1}|\mathcal{O}_{t-1}) d\lambda_{t-1} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} p(\lambda_t|\lambda_{t-1}, \mathcal{O}_{t-1}) p(\lambda_{t-1}|\mathcal{O}_{t-1}) d\lambda_{t-1} \tag{6.55}$$

Dado que se trata de um processo de Markov

$$p(\lambda_t|\lambda_{t-1}, \mathcal{O}_{t-1}) = p(\lambda_t|\lambda_{t-1}) \tag{6.56}$$

Combinando (6.55) e (6.56) obtém-se (6.47).

6.D Demonstração da equação (6.48)

Aplicando a lei de Bayes:

$$p(\lambda_t|\mathcal{O}_t) = \frac{p(\lambda_t, \mathcal{O}_t)}{p(\mathcal{O}_t)} \tag{6.57}$$

Dado que $\mathcal{O}_t = \{y_t, \mathcal{O}_{t-1}\}$ a equação (6.57) vem

$$p(\lambda_t|\mathcal{O}_t) = \frac{1}{p(\mathcal{O}_t)} p(y_t|\lambda_t, \mathcal{O}_{t-1}) p(\lambda_t, \mathcal{O}_{t-1}) =$$

$$= p(y_t|\lambda_t, \mathcal{O}_{t-1}) p(\lambda_t|\mathcal{O}_{t-1}) \frac{p(\mathcal{O}_{t-1})}{p(\mathcal{O}_t)} \tag{6.58}$$

Uma vez que λ_t é o estado do processo de Markov

$$p(y_t|\lambda_t, \mathcal{O}_{t-1}) = p(y_t|\lambda_t) \tag{6.59}$$

Assim,

$$\frac{p(\mathcal{O}_{t-1})}{p(\mathcal{O}_t)} = \frac{1}{p(y_t|\mathcal{O}_{t-1})} = k_t \tag{6.60}$$

é independente de λ_t e corresponde à constante de normalização. Combinando (6.58), (6.59) e (6.60) obtém-se (6.48).

7. Controlo Tolerante a Falhas de um Sistema de Três Tanques

Neste capítulo estuda-se o problema do controlo tolerante a falhas e da reconfiguração de um sistema de três tanques utilizando controlo comutado baseado em modelos múltiplos.

A utilização de técnicas baseadas em modelos múltiplos permite abordar o controlo tolerante a falhas. De acordo com esta abordagem, o conjunto dos modelos, descreve o comportamento dinâmico do processo, quer sob funcionamento normal, quer sob condições de funcionamento em que ocorrem diversas falhas. De uma forma geral estas falhas podem ocorrer no processo, nos sensores ou nos actuadores. Além da situação de funcionamento normal, para cada situação de falha (simples ou múltipla) existe um modelo e um controlador, os quais poderão diferir na sua estrutura, dizendo-se então que ocorre (em sentido estrito) uma reconfiguração do sistema de controlo. Segundo este conceito de reconfiguração, inclui-se ainda a possibilidade, sob a situação de falha, do objectivo principal do sistema de controlo ser alterado. Assim, quando ocorre uma falha no processo os objectivos do sistema de controlo iniciais podem ser abandonados centrando-se na minimização de prejuízos e questões de segurança. Como exemplo das consequências da não alteração dos objectivos de controlo quando existem falhas, pode citar-se o caso ocorrido num oleoduto siberiano em que a perda de pressão devido a uma rotura foi compensado pelo controlador aumentando a bombagem.

Nesta abordagem o supervisor do controlador comutado toma o lugar do sistema de detecção e identificação de falhas, tendo ainda a tarefa da reconfiguração do sistema de controlo. Sobre as abordagens aos problemas do controlo tolerante a falhas e da reconfiguração baseadas em controlo robusto e controlo adaptativo veja-se [37, 59].

7.1 Introdução

O controlo tolerante a falhas surge como um resposta natural às crescentes exigências de segurança e fiabilidade em sistemas complexos.

O objectivo do controlo tolerante a falhas é garantir o funcionamento do processo na presença de falhas, permitindo um degradação suave do seu desempenho e minimizando os prejuízos. As tarefas críticas de um controlador tolerante a falhas são: a detecção e identificação de falhas; e a reconfiguração do controlador.

A reconfiguração do controlador (em sentido lato) pode implicar uma alteração dos parâmetros do controlador. Em sentido estrito a reconfiguração, além da alteração dos parâmetros dos controlador, implica a alteração da estrutura de controlo, explorando a redundância do processo ou alterando mesmo os objectivos de controlo.

Neste trabalho a análise de reconfigurabilidade assume-se que foi feita *a priori* usando *e.g.* os métodos em [73]. Assim, para cada falha pressupõe-se que existem parâmetros e/ou estruturas de controlo que satisfazem requisitos de funcionamento definidos *a priori*.

Nas secções seguintes é desenvolvido um exemplo de aplicação do controlo comutado baseado em modelos múltiplos ao controlo tolerante a falhas de um sistema de três tanques. Dado que a ocorrência de falhas causa alterações na dinâmica do sistema a controlar, a aplicação de técnicas baseadas em modelos múltiplos encontra suporte na teoria desenvolvida nesta tese para sistemas variáveis no tempo.

7.2 Descrição do sistema de três tanques

O processo usado consiste em três tanques interligados como se apresenta na figura 7.1.

O objectivo de controlo neste sistema é controlar o nível do líquido no tanque no.3. O tanque no.3 está ligado ao tanque no. 1 através de dois tubos, um situado ao nível do fundo do tanque, e outro num nível intermédio. Em cada um destes tubos existem válvulas que podem servir para simular falhas e/ou para controlar o nível dos tanques. Existe também uma válvula no fundo do tanque no. 1, o que permite simular uma fuga no tanque. A bomba P1 é responsável por bombear o líquido para dentro do tanque no. 1. O nível do líquido no interior dos tanques é medido por sensores contínuos, um em cada tanque. No tanque no. 2, os sensores, os actuadores, e as respectivas ligações ao tanque no. 3, são exactamente simétricas em relação ao tanque no. 1. Obtém-se, assim, um processo com redundância, o que permite, caso ocorra uma falha, utilizar o tanque no. 2 em alternativa ao tanque no. 1. Este processo, e o respectivo modelo, que foi utilizado como termo de comparação (*benchmark process*) [15, 28, 35, 36, 38, 39, 64], encontra-se descrito em detalhe em [21].

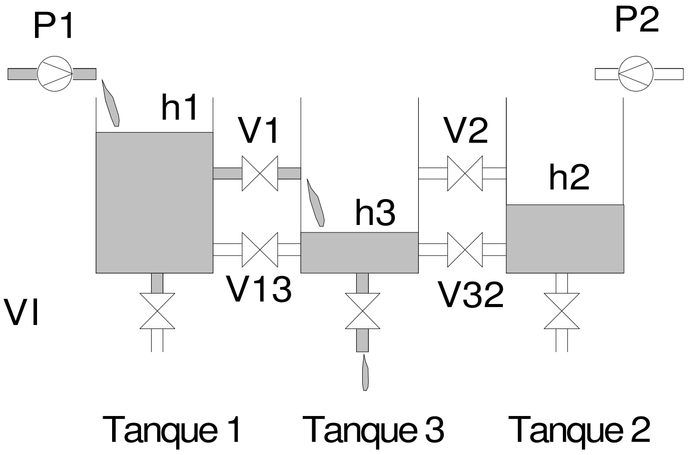

Fig. 7.1: O sistema de três tanques

7.3 Algoritmo de controlo

O algoritmo de controlo aplicado ao sistema dos três tanques é um controlador comutados baseado em múltiplos modelos discretos lineares, com supervisão, de acordo com o descrito no capítulo 3. Assim, as secções seguintes descrevem o controlador de uma forma abreviada.

Nas expressões abaixo segue-se a seguinte notação:

- y designa a variável controlada.
- u designa a variável manipulada.
- δu designa incrementos de u.
- y^* designa a referência para y.
- $k_\sigma(q)$ designa a função de transferência do controlador com índice σ.
- $\nu_p(q)$ designa a função de transferência do modelo com índice p.
- q designa o operador avanço.

7.3.1 Supervisor

O estimador de estado partilhado X_E é definido por

$$X_E(t+1) = \begin{bmatrix} A_E & 0 \\ 0 & A_E \end{bmatrix} X_E(t) +$$

$$+ \begin{bmatrix} b_E \\ 0 \end{bmatrix} y(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ b_E \end{bmatrix} \delta u(t) \tag{7.1}$$

$$\hat{y}_p = C_p X_E(t) \tag{7.2}$$

onde (A_E, b_E) é um par controlável dado por

$$A_E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots \end{bmatrix} \quad b_E = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix} \tag{7.3}$$

Assim, a dependência nos parâmetros do modelo de índice p apenas se faz sentir no vector de saída C_p. Os sinais de desempenho são dados por

$$\pi_i(t+1) = \pi_i(t)\lambda_\pi + (\hat{y}_i - y)^2 \tag{7.4}$$

onde $\lambda_\pi < 1$ e π_i é o sinal de desempenho associado ao modelo nominal de índice i.

7.3.2 Projecto do controlador

O controlador de estado partilhado é implementado da seguinte forma

$$X_C(t+1) = \begin{bmatrix} A_C & 0 \\ 0 & A_C \end{bmatrix} X_C(t) +$$

$$+ \begin{bmatrix} b_C \\ 0 \end{bmatrix} (y^*(t) - y(t)) + \begin{bmatrix} 0 \\ b_C \end{bmatrix} \delta u(t) \tag{7.5}$$

onde (A_C, b_C) é um par controlável. Os incrementos no sinal de controlo são dados por

$$\delta u_\sigma(t) = f_\sigma X_C(t) + g_\sigma(y^*(t) - y(t)) \tag{7.6}$$

onde f_σ e g_σ dependem dos parâmetros do controlador de índice σ.

Podem ser utilizados diversos métodos para projectar os diferentes controladores locais $k_\sigma(q)$. Neste exemplo de utilizaram-se controladores PID, que foram afinados para cada um do modelos considerados, os quais correspondem a diferentes condições de funcionamento (normal ou com falhas).

Os ganhos do controlador resultante definem $k_p(q)$. Cada controlador tem como objectivo minimizar o erro de seguimento e a sobreelevação. No entanto, note-se que diferentes controladores (para condições de funcionamento diferentes) podem ter em conta diferentes objectivos de controlo. Em particular, a sobreelevação pode ser crítica quando a mudança no modo de funcionamento leva o nível do tanque para muito próximo do nível máximo. Nesta situação uma sobreelevação elevada pode provocar derrame de líquido. Assim, num controlador projectado para funcionar em tais condições é mais importante minimizar a sobreelevação do que minimizar o erro de seguimento. Este caso será ilustrado com um exemplo de simulação.

7.4 Resultados de simulação

Consideram-se duas situações qualitativamente diferentes: na primeira existe reconfiguração apenas em sentido lato, ou seja uma adaptação, dado que a mudança no modo de funcionamento implica apenas uma alteração dos parâmetros do controlador, não havendo alteração na estrutura do controlador (mesmo tipo de controlador, mesma variável manipulada e mesma variável controlada); na segunda existe reconfiguração em sentido estrito, ou seja, além da alteração nos parâmetros existe uma alteração na estrutura do controlador (alteração de uma das variáveis manipuladas, alteração das variáveis controladas e utilização da redundância do processo).

7.4.1 Reconfiguração em sentido lato

Considere-se o processo descrito acima na figura 7.1 onde, em condições normais de funcionamento, a variável manipulada é a velocidade da bomba P1, e a variável controlada é o nível no tanque no. 3. Considerem-se duas falhas que podem ocorrer em simultâneo:

- Falha 1: o tubo do tanque no. 1 para o tanque no. 3 parcialmente obstruído (válvula V1 bloqueada a 60 %)
- Fault 2: fuga no tanque no. 1

Assim, podem ocorrer quatro modos de funcionamento.

- 1 - Normal.

- 2 - V1 parcialmente obstruída.
- 3 - Fuga no tanque no. 1.
- 4 - Ambas, fuga e obstrução.

Neste caso, por decisão de projecto, a reconfiguração por parte do controlador comutado implica apenas uma alteração dos parâmetros do controlador. As variáveis controladas e manipuladas são as mesmas na situação de funcionamento normal e nas situações de falha. Para cada modo de funcionamento, adaptou-se um modelo linear, e afinou-se um controlador PID, cujos parâmetros se mostram nas tabelas 7.1 e 7.2.

Modelo no.	Válvula V1	V_l
1	100 %	0 %
2	60 %	0 %
3	100 %	100 %
4	60 %	100 %

Tabela 7.1: Condições de funcionamento para os modelos locais.

Controlador no.	K	Ti	Td
1	1.0e-3	150 s	25 s
2	0.8e-3	250 s	40 s
3	0.8e-3	200 s	50 s
4	1.0e-3	250 s	60 s

Tabela 7.2: Parâmetros para os controladores PIDs.

Nas simulações efectuadas o tempo de amostragem foi ajustado para $T_S = 20\,s$. O parâmetro λ_π (efeito de filtragem) do gerador de sinais de desempenho foi ajustado para $\lambda_\pi = 0.5$, e o tempo de permanência do mecanismo de comutação foi escolhido como $T_D = 3$ amostras. Nalguns testes, adicionou-se ao sinal de controlo um ruído de excitação com potência de $\eta^2 = 0.25$e-11.

O processo inicia a operação no modo normal (modo de operação 1); passa para o modo de operação 2 em $t = 1500$; modo de operação 3 em $t = 3000$; e modo de operação 4 em $t = 4500$. A referência para o nível no tanque no. 3 é mantida constante em 0.1 m.

A figura 7.2 mostra a evolução da saída do supervisor. Observa-se que o supervisor não comuta imediatamente para o modelo correcto. Este atraso (do supervisor) entre a comutação no modo de funcionamento e a comutação para o controlador correcto cresce à medida que o parâmetro λ_π tende para 1 (filtro aproxima-se de um integrador).

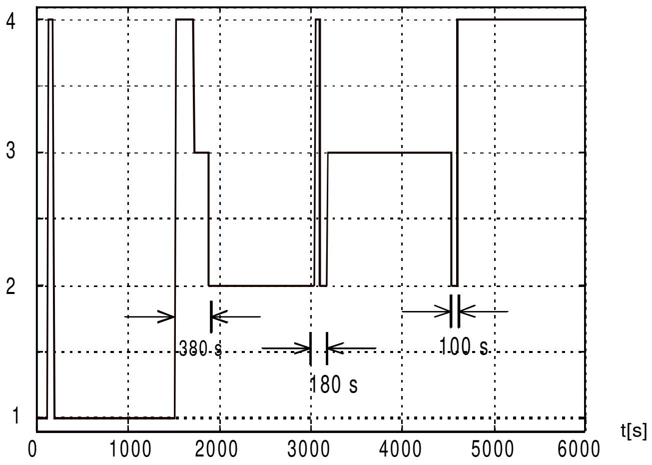

Fig. 7.2: Saída do supervisor e atraso entre a ocorrência da falha e a comutação (estabilizada) para o modelo/controlador correcto.

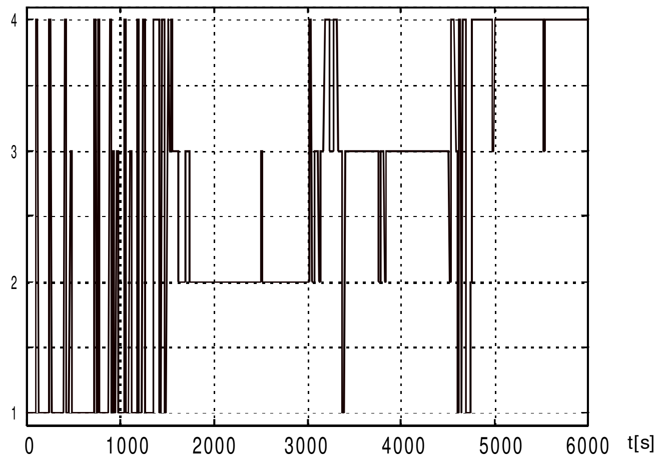

Fig. 7.3: Saída do supervisor com $\lambda_\pi = 0$ (sem filtragem no gerador de sinais de desempenho).

No entanto, não é possível reduzir este atraso reduzindo o parâmetro λ_π, arbitrariamente até zero. Na figura 7.3 pode observar-se o efeito de um $\lambda_\pi = 0.0$, tornando a saída do supervisor demasiado sensível a flutuações dos erros de estimação.

Para $\lambda_\pi = 0.95$, a figura 7.4 mostra o nível do tanque no. 3, sem erro estático de seguimento, e o nível no tanque no. 1, o qual se mantém abaixo do nível máximo durante toda a simulação apesar da sobreelevação levar o nível no tanque no. 1 até muito perto do máximo.

A figura 7.5 mostra uma comparação entre o desempenho de seguimento do controlo comutado (comutação entre 4 controladores PIDs) e os mesmo controladores PIDs quando aplicados de forma constante ao longo da simulação. Pode observar-se que, apesar do bom desempenho do controlador comutado, o mínimo do custo quadrático do erro de seguimento acumulado ocorre para o controlador PID número 1, constante.

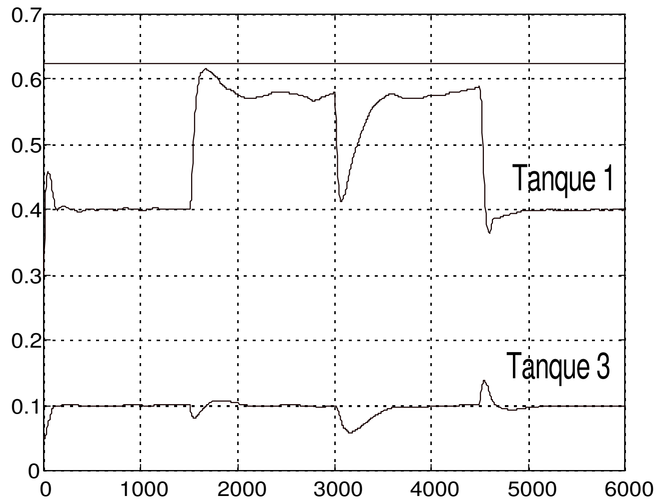

Fig. 7.4: Nível nos tanque no. 1 e no tanque no. 3, com controlo comutado.

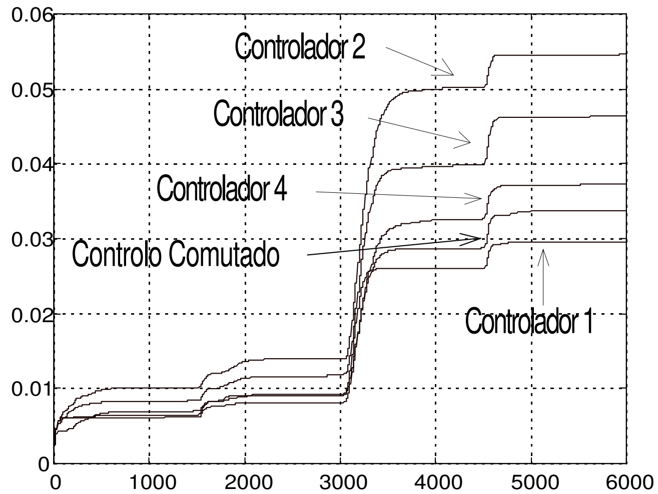

Fig. 7.5: Custo do erro quadrático acumulado do controlo comutado e de controladores PID.

No entanto, o controlador número 1, o que possui o melhor desempenho em termos de seguimento, tem um pior desempenho em termos de sobreelevação, quando comparado com o controlador comutado (o segundo melhor). Pode observar-se, na figura 7.6, que a sobreelevação na simulação com o controlador PID número 1, provoca um derrame no tanque no. 1, cerca de $t = 1500$ s. Este facto não é um acontecimento fortuito, mas a consequência dos diversos controladores PIDs terem sido afinados tendo em conta diferentes modos de funcionamento e diferentes objectivos de controlo.

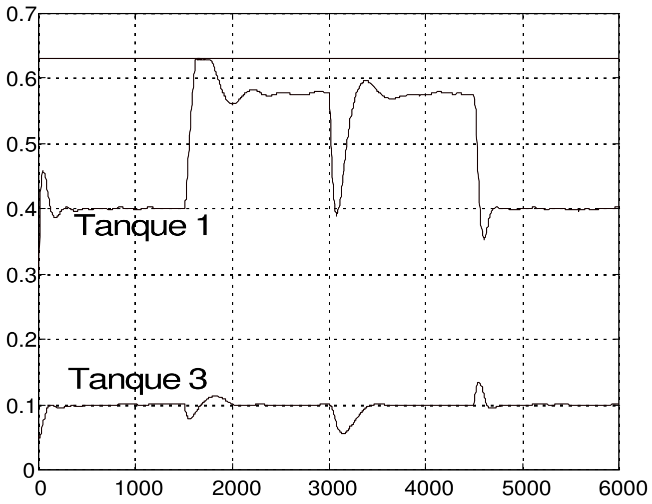

Fig. 7.6: Nível no tanque no. 1 com o controlador PID no. 1.

7.4.2 Reconfiguração em sentido estrito

Considere-se o processo dos três tanque, em que a bomba P1 controla o nível no tanque no. 1 (controlador PI), e a válvula V1 (on-off) controla o nível no tanque no. 3. Consideram-se três falhas, as quais não ocorrem simultaneamente,

- Falha 1: Válvula V1 encravada e fechada.
- Falha 2: Válvula V1 encravada e aberta.
- Falha 3: Válvula V_l está aberta (simula uma fuga no tanque no.1)

Neste caso, os objectivos de controlo são: controlar o nível no tanque no. 3; e minimizar o derrame caso ocorra uma fuga. Deste modo, a reconfiguração implica o uso da redundância existente no processo, ou seja tanque no. 2 e/ou a ligação redundante entre os tanques no. 1 e no. 3.

O efeito das falhas pode observar-se nas figuras 7.7 a 7.9. Para cada falha estabeleceu-se

Modos de func.	Cadeias de Controlo	V1
Normal	V1→h3 e P1→h1	fechada
Falha 1	V1 →h3 e P1→h1	manipul.
Falha 2	P1→h3	fechada
Falha 3	P2→h3	fechada

Tabela 7.3: Modos de funcionamento e reconfiguração.

a priori a reconfiguração que se encontra definida na tabela 7.3. De forma semelhante construíram-se modelos lineares (equação 7.7) do tanque no. 1 que foram utilizados no multi-estimador.

$$h1(t+1) = C_1 h1(t) + C_2 P1(t) + C_3 V1(t) + C_4 \tag{7.7}$$

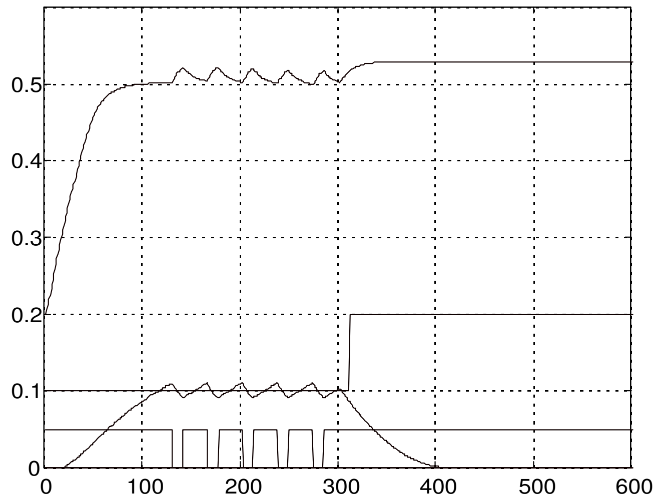

Fig. 7.7: Falha 1 - nível no tanque no. 1 e no. 3; válvula V1.

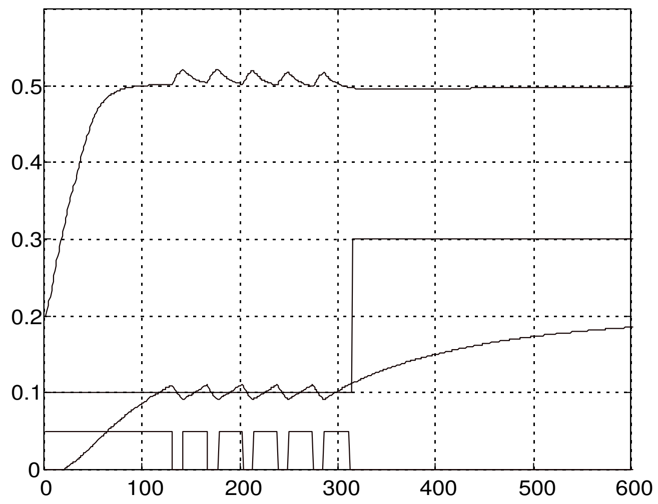

Fig. 7.8: Falha 2 - nível no tanque no. 1 e no. 3; válvula V1.

As simulações foram executadas com um tempo de amostragem $T_s = 1s$ e $\lambda_\pi = 0.93$. Os controladores PI das bombas P1 e P2 foram afinados com os ganhos: $K_p = 0.001$, $Ti = 200s$. As figuras 7.10 a 7.12 mostram o sistema controlado.

Nestas simulações apenas ocorre uma falha, em cada ensaio. Assim, o supervisor do controlador comutado funciona como um dispositivo de detecção e identificação de falhas, que após a detecção, fixa a decisão e aplica a reconfiguração pré-definida.

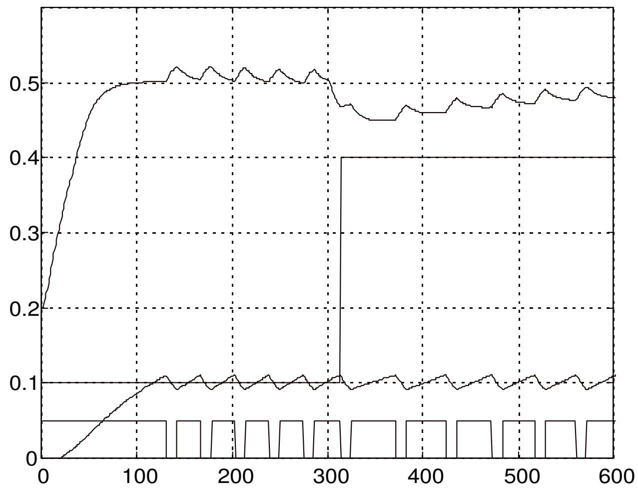

Fig. 7.9: Falha 3 - nível no tanque no. 1 e no. 3; válvula V1.

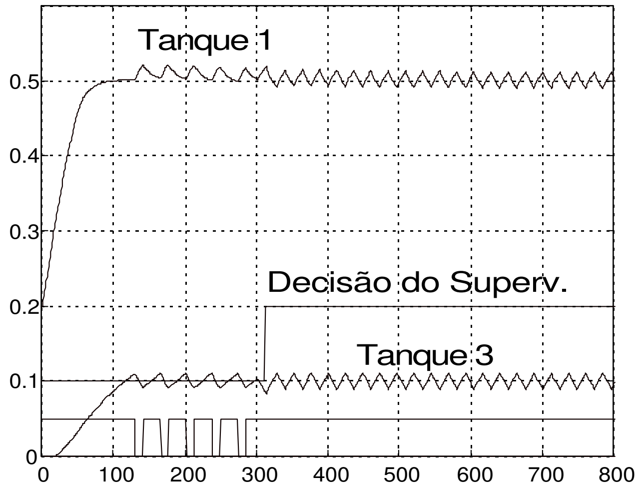

Fig. 7.10: Falha 1 - nível no tanque no. 1 e no. 3; válvula V1; decisão do supervisor

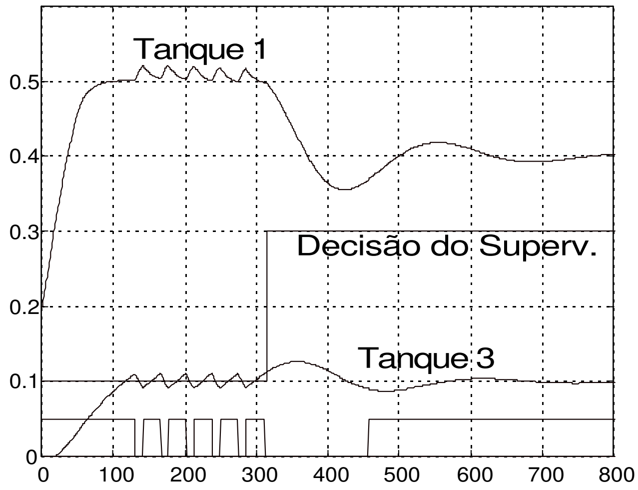

Fig. 7.11: Falha 2 - nível no tanque no. 1 e no. 3; válvula V1; decisão do supervisor

De modo a minimizar o derrame provocado pela fuga no tanque (falha no. 3) a reconfiguração, implica utilizar o tanque no. 2, veja-se a figura 7.12. Observa-se que em todas as simulações o supervisor detecta correctamente as falhas num curto intervalo de tempo, reconfigurando o sistema de controlo de acordo com o projectado.

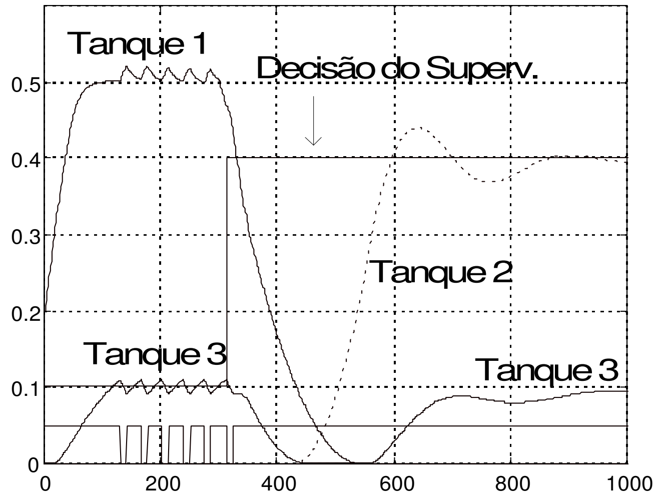

Fig. 7.12: Falha 3 - nível no tanque no. 1 e no. 3; válvula V1; decisão do supervisor

7.5 Conclusões

Neste capítulo desenvolve-se um exemplo de aplicação de controlo comutado ao controlo tolerante a falhas de um sistema de três tanques. Foram realizadas simulações que exploram a redundância intrínseca do processo de forma a efectuar-se a reconfiguração deste em função da falha detectada. O sistema de controlo foi testado com a ocorrência de falhas simples, múltiplas, bem como sequências de falhas. As reconfigurações consideradas incluem não só a mudança de parâmetros do controlador mas também a alteração das variáveis manipuladas e/ou controladas. Os resultados obtidos confirmam a viabilidade do controlo comutado como forma de lidar com a ocorrência de falhas, permitindo uma reconfiguração do sistema de controlo que para além de uma alteração de parâmetros ou da estrutura do controlador permite uma mudança nos objectivos de controlo.

8. Controlo Comutado de um Campo de Colectores Solares

Neste capítulo apresentam-se resultados experimentais de um controlador comutado, baseado no algoritmo adaptativo MUSMAR, aplicado no campo de colectores solares, ACUREX, da Plataforma Solar de Almeria. O algoritmo adaptativo, MUSMAR, é usado para gerar os controladores e os modelos preditivos do estimador.

8.1 Introdução

Este capítulo diz respeito à aplicação de controlo comutado à regulação da temperatura de saída de um campo de colectores solares distribuídos. Para este propósito a variável manipulada é o caudal de óleo à entrada do campo de colectores. No entanto, a variação de caudal origina fortes variações na dinâmica do processo, as quais têm de ser compensadas.

Diversos algoritmos de controlo têm sido aplicados com sucesso neste campo de colectores solares, incluindo controladores adaptativos auto-sintonizáveis com colocação de pólos [11], controlo preditivo adaptativo com o algoritmo MUSMAR [14, 71], controlo difuso [66], GPC com selecção de ganhos [12], cancelamento de ressonância com pre-selecção de ganhos [40], e controlo adaptativo não-linear [4, 70, 69].

Neste trabalho o controlo comutado foi utilizado de modo a adaptar o controlador às rápidas mudanças de dinâmica causadas por variações de caudal e variações de radiação solar incidente. Os ganhos dos controladores são o resultado da aplicação do algoritmo adaptativo MUSMAR [19], a modelos adaptados para cada ponto de funcionamento. A comutação entre controladores é feita de acordo com o mecanismo de comutação com imposição do tempo de permanência.

Tal como é demonstrado em [4, 70, 69] a dinâmica do processo é não linear, dependendo o modelo linearizado do caudal o qual, por sua vez, depende (através da variável de controlo) da radiação solar. Em [4] mostra-se que se esta não linearidade não for considerada no projecto do controlador, isso pode resultar numa resposta muito oscilatória ou mesmo instável. A utilização do controlo comutado baseado em modelos múltiplos permite resolver este problema constituindo uma aproximação ao controlador óptimo não linear.

8.2 Descrição do Campo de Colectores Solares

O campo de colectores solares distribuídos - ACUREX - utilizado nos ensaios experimentais apresentados neste capítulo é descrito em detalhe em [10, 11], figura 8.1.

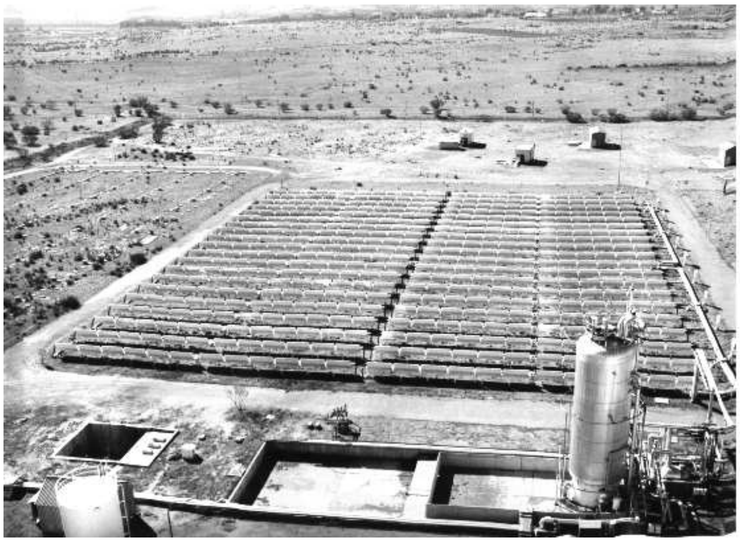

Fig. 8.1: Campo de colectores solares de Almeria.

O campo consiste em 480 espelhos cilíndrico-parabólicos dispostos em 20 filas (10 circuitos paralelos) com orientação Este-Oeste.

Cada circuito tem um comprimento de 172 m, onde 142 m estão expostos à radiação solar, enquanto 30 m são passivos. Obtendo-se uma superfície total de abertura de $2672\,m^2$. Esta instalação pode fornecer uma potência de pico de 1.2 MW de energia térmica.

Os espelhos parabólicos concentram a radiação solar sobre um tubo de aço, aquecendo óleo (óleo sintético Santotherm 55)que flui no seu interior. O óleo é bombeado da base de um tanque de armazenamento para o campo de colectores, sendo introduzido no topo do tanque. Este óleo tem uma boa condutividade térmica e a sua densidade varia fortemente com a temperatura. Esta propriedade origina uma estratificação no tanque de armazenamento com o óleo mais quente na parte superior e o mais frio no fundo.

Os espelhos concentradores possuem um sistema de seguimento do sol sobre um eixo (este-oeste), permitindo "seguir" o sol ao longo do dia. O circuito de óleo do campo de colectores é representado de uma forma esquemática na figura 8.2.

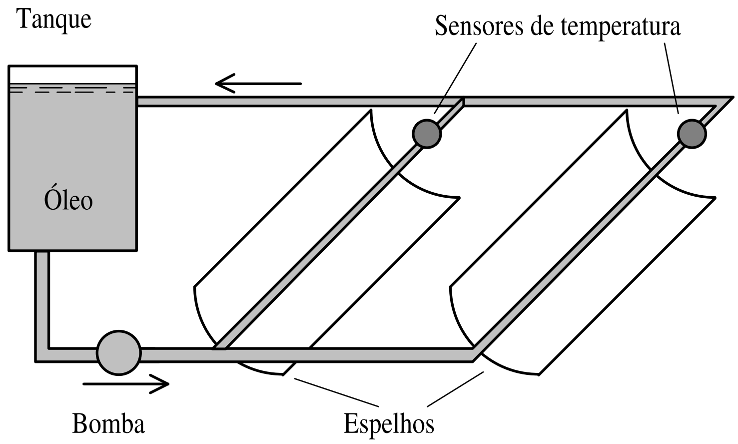

Fig. 8.2: Representação esquemática do circuito de óleo do campo de colectores solares.

A bomba do óleo, que regula o caudal de óleo através do campo de colectores, é controlada por um controlador PID industrial, o qual não está directamente acessível. Por este motivo a variável manipulada do processo é a referência de caudal deste controlador. Daqui em diante, as referências à "variável manipulada - o caudal" dizem respeito de facto à referência na entrada deste controlador PID. Note-se, no entanto, que a velocidade desta cadeia de controlo interna (potência da bomba - caudal) é várias vezes mais rápida do que a cadeia que se pretende controlar (referência do caudal - temperatura de saída). Deste modo, a manipulação directa da potência da bomba, ou a eventual alteração dos parâmetros do PID não introduziriam mudanças importantes no processo considerado. As principais perturbações no processo são, as variações da radiação solar e a temperatura do óleo à entrada do campo de colectores.

8.3 Algoritmo de Controlo

Em torno de cada ponto de funcionamento, definido pelo caudal do óleo e pela radiação solar, assume-se que o processo é descrito por um modelo SISO linear discreto, invariante no tempo. É para cada um destes pontos de funcionamento que se determina um modelo, e se projecta um controlador usando o algoritmo MUSMAR e tomando o controlador que este gera ao convergir

O supervisor utilizado nestes ensaios tem em conta a estrutura dos modelos preditivos do MUSMAR.

Considere-se o seguinte estimador de estado partilhado, com modelos de δu (incrementos do caudal) para $\tilde{y}$ (erro de seguimento)

$$X_E(t+1) = \begin{bmatrix} A_E & 0 \\ 0 & A_E \end{bmatrix} X_E(t) +$$

$$\begin{bmatrix} b_E \\ 0 \end{bmatrix} y(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ b_E \end{bmatrix} \delta u(t) \tag{8.1}$$

$$\hat{\tilde{y}}_p = C_p X_E(t) \tag{8.2}$$

onde $\hat{\tilde{y}}_p$ é o erro do modelo preditivo de índice p, A_E e b_E são dados por

$$A_E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots \end{bmatrix} \quad b_E = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix} \tag{8.3}$$

e C_p depende dos parâmetros do modelo com índice p.

Considere-se ainda o gerador de sinais de desempenho.

$$\pi_i(t+1) = \pi_i(t)\lambda_\pi + (\hat{\tilde{y}}_i - \tilde{y})^2 \tag{8.4}$$

onde $\lambda_\pi < 1$ e π_i é o sinal de desempenho associado ao modelo com índice i.

8.4 Projecto dos controladores

Podem ser utilizados diversos métodos para o projecto dos controladores lineares $k_\sigma(q)$, cada um para uma condição de funcionamento. O algoritmo adaptativo MUSMAR foi aplicado aos potenciais modelos do processo e foi iterado até se atingir uma situação em que os ganhos convergiram. Os ganhos obtidos foram então guardados, definindo a função de transferência do controlador $K_p(q)$.

Considere-se um processo descrito por um modelo SISO ARMAX

$$A(q^{-1})y(t) = B(q^{-1})\delta u(t-1) + C(q^{-1})e(t) \tag{8.5}$$

onde $y(t)$ é a saída, $\delta u(t)$ é a entrada, $e(t)$ é uma sinal incorrelacionado de média nula, e $A(q^{-1})$, $B(q^{-1})$, $C(q^{-1})$ são polinómios tais que A e B não têm factores comuns instáveis e o polinómio C é estrictamente de fase mínima. Associado a este processo considere-se o funcional de custo quadrático ao longo de uma horizonte de T passos:

$$J_T(t) = \frac{1}{T} E\left\{ \sum_{k=t}^{t+T-1} \left[\tilde{y}^2(k+1) + \rho\delta u^2(k) \mid I(t)\right] \right\} \tag{8.6}$$

onde ρ é uma peso (penalização) no sinal de controlo, $\tilde{y}(t)$ é o erro de seguimento,

$$\tilde{y}(t) = y(t) - y^*(t) \tag{8.7}$$

e $E\{.\,|I(t)\}$ designa a média condicionada à informação disponível até ao instante t [49]. O problema de optimização básico do MUSMAR [19] pode formular-se da seguinte forma: Dada uma sequência de ganhos de retroacção constante

$$\{F_0,\, F_0,\, F_0,\, ...\} \tag{8.8}$$

que actuam no processo desde o instante $t+1$ até $t+T-1$, encontrar o vector de ganhos, F, tal que

$$\delta u(t) = F's(t) \tag{8.9}$$

sendo

$$s(t) = [\tilde{y}(t)\ \tilde{y}(t-1)\ ...\ \tilde{y}(t-n_a+1)\quad \delta u(t-1)\ \delta u(t-2) \ldots \delta u(t-n_b)]' \tag{8.10}$$

minimiza o funcional de custo $J_T(t)$. Esta estratégia pode ser concretizada da seguinte forma:

O algoritmo MUSMAR[19]

1. Calcule-se recursivamente a estimativa dos parâmetros dos modelos preditivos, θ_i, ψ_i, μ_i e ψ_i, pelo método dos mínimos quadrados (RLS - *Recursive Least Squares*).

$$\tilde{y}(t+i-T) \approx \theta_i \delta u(t-T) + \psi_i' s(t-1) \tag{8.11}$$

$$\delta u(t+i-T-1) \approx \mu_{i-1}\delta u(t-T) + \phi_{i-1}' s(t-1) \tag{8.12}$$

$$i = 1 \ldots T$$

   onde $\approx$ designa a igualdade no sentido dos mínimos quadrados

2. Actualizem-se os ganhos de retroacção de acordo com

$$F = -\frac{\sum_{i=1}^{T} \theta_i \psi_i + \rho \sum_{i=1}^{T-1} \mu_i \phi_i}{\sum_{i=1}^{T} \theta_i^2 + \rho(1 + \sum_{i=1}^{T-1} \mu_i^2)} \tag{8.13}$$

   e calcule-se o sinal de controlo com

$$\delta u(t) = F's(t) + \eta(t) \tag{8.14}$$

onde $\eta(t)$ é uma sequência branca de ruído de excitação injectada de modo a garantir a existência de excitação persistente e $s(t)$ é definido por (8.10) sendo uma estatística suficiente para o cálculo do controlo, daqui em diante designado como *pseudoestado*.

Considerem-se os modelos preditivos, 1 passo à frente, do processo

$$\hat{\tilde{y}}_i(t) = [\theta_i \ \psi_i'][\delta u(t-1) \ s'(t-1)]' \tag{8.15}$$

e seja o vector de parâmetros c_i em (7.2) e o vector do estimador de estado partilhado $X_E(t)$

$$c_i = [\theta_i \ \psi_i] \tag{8.16}$$

$$X_E(t) = [\delta u(t-1) \ s(t-1)]' \tag{8.17}$$

O erro do estimador é definido como o erro do preditor 1 passo à frente

$$e_i = \tilde{y}_i(t) - \hat{\tilde{y}}_i(t) = \tilde{y}_i(t) - [\theta_i \, \psi_i][\delta u(t-1) \, s(t-1)]' \tag{8.18}$$

e o sinal de controlo,

$$\delta u_i(t) = L_i' s(t) \tag{8.19}$$

onde L_i é o $i - ésimo$ vector de parâmetros do multicontrolador obtido do algoritmo MUSMAR, i.e. L_i é obtido iterando o MUSMAR com os modelos do processo obtidos para radiação e caudal aproximadamente constante.

O comportamento dinâmico do sistema depende principalmente do caudal de óleo (variável manipulada). A influência da radiação solar pode ser descrita de uma forma aproximada por uma alteração do ganho estático do processo. Assim, partindo de dados experimentais em dois pontos de funcionamento diferentes, identificaram-se dois modelos discretos lineares.

- 1 - modelo com caudal de, aproximadamente, 5 l/s: modelo no. 0.
- 2 - modelos com caudal de, aproximadamente, 7 l/s obtidos com diferentes valores de radiação: modelos no. 4 and 7.

Partindo dos modelos acima indicados, geraram-se outros multiplicando o seu ganho estático por uma constante C, procurando desta forma gerar modelos que cubram o máximo de condições de funcionamento possível.

Desta forma, torna-se possível lidar com as variações no caudal e na radiação solar. Os modelos 1, 2, e 3, foram obtidos a partir do modelo 0; o modelo 5, do 4; e o modelo 6 do 7. Os modelos estão descritos na tabela 8.1. Além destes, foi identificado mais um modelo para um caudal de aproximadamente 3.5 l/s que foi usado no teste no. 3.

Modelo no.	Caudal	C	ρ
0	5 l/s	1.00	100
1	5 l/s	1.50	100
2	5 l/s	0.66	50
3	5 l/s	0.33	10
4	7 l/s	1.00	70
5	7 l/s	1.50	150
6	7 l/s	1.50	150
7	7 l/s	1.00	100

Tabela 8.1: Modelos definidos em dois pontos de funcionamento.

Modelo no.	Caudal	C	ρ
8	3.5 l/s	1.00	1000

Tabela 8.2: Modelo definido com caudal de 3.5 l/s.

O tempo de amostragem foi fixado em $T_S = 30\,s$. No gerador de sinais de desempenho utilizou-se uma valor de $\lambda_\pi = 0.9$, e no mecanismo de comutação definiu-se um tempo de permanência de $T_D = 10$.

O algoritmo adaptativo MUSMAR foi aplicado a cada um dos modelos, com uma estrutura de pseudoestado definida por $n_a = 3$ e $n_b = 2$. O horizonte de predição foi fixado em $T = 10$, e a penalização do sinal de controlo, ρ, usada em cada modelo é a que se apresenta nas tabelas 8.1 e 8.2.

8.5 Resultados Experimentais

As figuras 8.3 a 8.6 mostram os resultados experimentais obtidos nos ensaios 1 e 2.

Os gráficos mostram a evolução no tempo das variáveis do processo desde o arranque dos ensaios. A referência da temperatura foi escolhida como uma sequência de degraus (positivos e negativos).

Nos ensaios 1 e 2, à parte a variação, devido ao movimento aparente do sol ao longo do dia, e as perturbações induzidas pelo operador de campo, não existem outras perturbações sobre o processo.

No ensaio 1 cerca das 14h45m foi provocada uma perda no seguimento do sol (*STOW State*), tendo-se então recuperado o seguimento (*TRACK state*). Na figura 8.3 observa-se a reacção do sistema controlado a essa forte perturbação que se traduz numa súbita diminuição na quantidade de energia solar recebida pelos colectores.

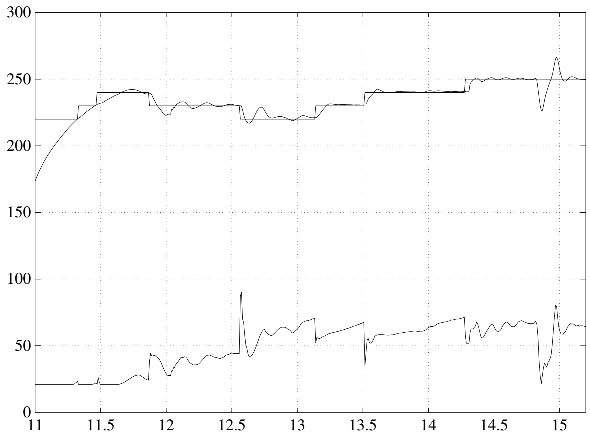

Fig. 8.3: Ensaio 1: Caudal (l/s) $caudal \times 10$, referência e temperatura de saída (C^o) em função do tempo ($hora$).

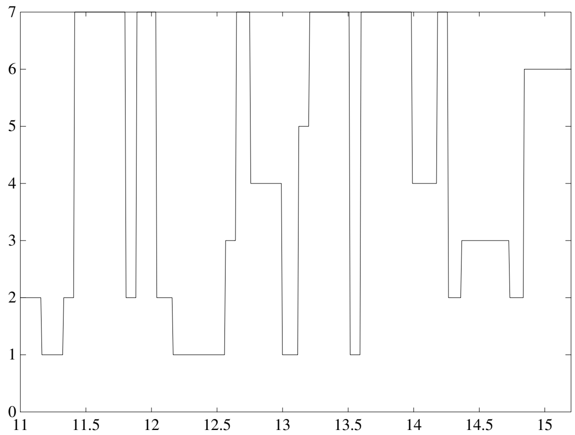

Fig. 8.4: Ensaio 1: Saída do supervisor, σ em função do tempo ($hora$).

Para valores de caudal superiores a $6\,l/s$ pode observar-se nos ensaios 1 e 2 que quase não existe sobreelevação nas respostas aos escalões na referência, sendo o tempo de estabelecimento de 6 minutos. Para valores inferiores de caudal, a resposta é mais oscilatória e o tempo de estabelecimento aumenta. Isto acontece, porque quanto mais elevado é o caudal, menor é o tempo que o óleo permanece nas tubagens dos colectores, reduzindo assim, os tempos de resposta e os efeitos ressonantes e anti-ressonantes do campo de colectores solares [40].

Nas figuras 8.7 a 8.9 mostram-se Resultados do ensaio 3. Pode observar-se a resposta do sistema controlado com fortes perturbações na radiação solar devido à passagem de uma nuvem.

Na figura 8.10 podem observar-se resultados do ensaio 4. Neste ensaio foram utilizados apenas dois controladores: o controlador no. 7 e o no. 8, na tabela 8.2.

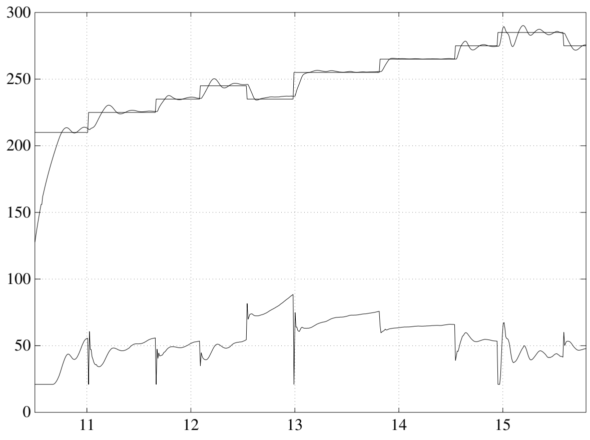

Fig. 8.5: Ensaio 2: Referência, temperatura de saída (C^o), e $caudal \times 10$ em função do tempo ($hora$).

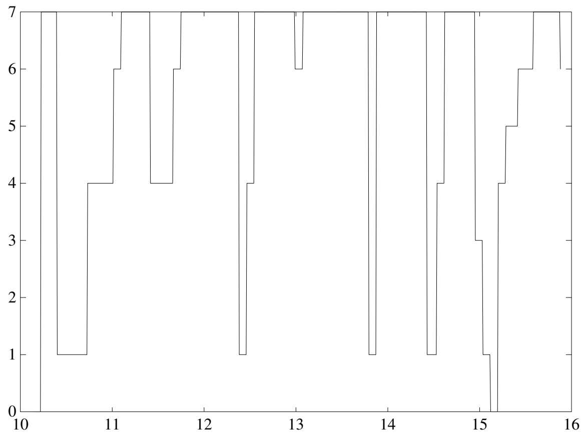

Fig. 8.6: Ensaio 2: saída do supervisor, σ, em função do tempo ($hora$).

Apesar do controlador no. 7 nos ensaios anteriores ser frequentemente o escolhido pelo supervisor, o que também se verifica neste ensaio, o desempenho do controlador é fraco, devido a um comportamento oscilatório do sistema. Isto ilustra a importância de ter controladores que cubram o maior número possível de condições de funcionamento.

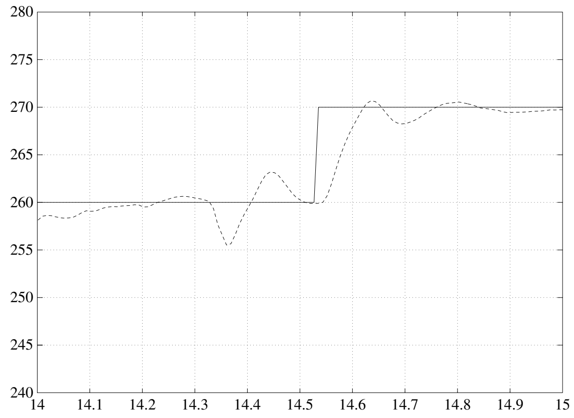

Fig. 8.7: Ensaio 3: Referência e temperatura de saída (C^o), em função do tempo ($hora$).

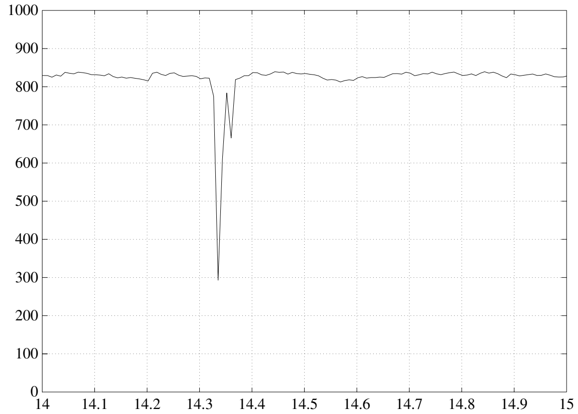

Fig. 8.8: Ensaio 3: radiação solar (W/m^2) em função do tempo ($hora$).

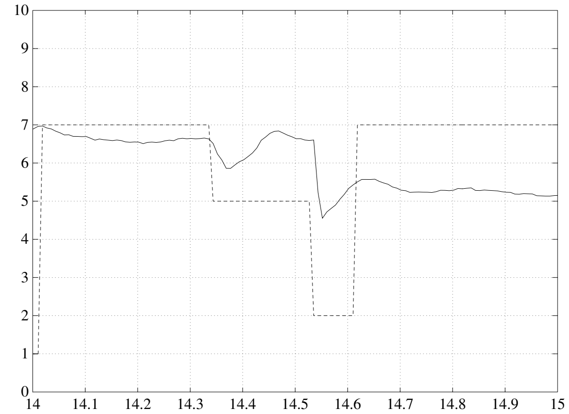

Fig. 8.9: Ensaio 3: supervisor, σ, e caudal de óleo (l/s) em função do tempo ($hora$).

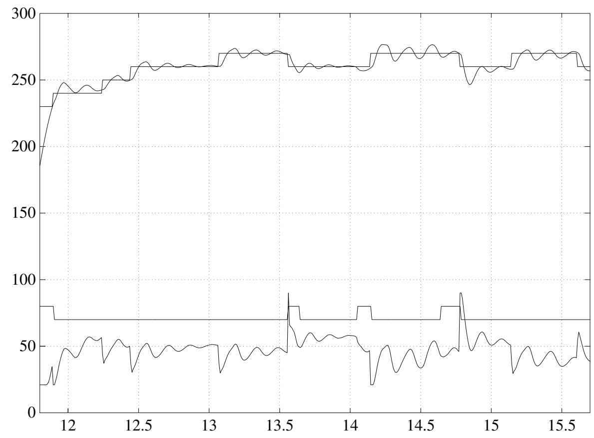

Fig. 8.10: Ensaio 4: referência, temperatura de saída (C^o), $\sigma \times 10$, e $caudal \times 10$ (l/s) em função do tempo ($hora$).

8.6 Conclusões

Neste capítulo apresentam-se resultados experimentais de um controlador comutado baseado em modelos múltiplos aplicado a um campo de colectores solares de escala industrial. O algoritmo adaptativo MUSMAR é usado com êxito como ferramenta de projecto de cada um dos controladores. Os ensaios foram realizados de forma a cobrir tanto quanto possível todas as em situações usuais de operação do processo. Os resultados obtidos mostram que o controlo comutado pode ser aplicado com sucesso num processo não linear com rápidas variações de comportamento dinâmico. São avaliadas as capacidades de resposta quer a mudanças da temperatura de referência quer a súbitas perturbações externas, como a variação de radiação solar sob o efeito de nuvens. Constatou-se ainda a importância dos modelos considerados cobrirem o máximo número possível de condições de funcionamento.

9. Conclusões

Nesta tese apresenta-se um estudo sobre controladores comutados baseados em múltiplos modelos e testam-se os algoritmos considerados, em simulações e ensaios experimentais.

O conjunto de abordagens propostas tem o objectivo de cobrir problemas de engenharia que ocorrem em processos industriais. Os processos industriais têm, frequentemente, um comportamento não linear, variável no tempo, e são modelados de uma forma inexacta. O controlo comutado surge como uma forma de lidar com estes problemas. Segundo esta abordagem, o controlador activo em cada instante é escolhido de uma família de controladores que cobre toda a gama de situações admitidas *a priori* para o processo. A escolha entre diferentes controladores é feita pelo supervisor, o qual baseia a sua decisão comparando o processo com a família de modelos admitidos. Note-se que, apesar de relacionados, esta estrutura de controlo não deverá ser confundida com os métodos de selecção de ganhos, uma vez que nesta última a escolha do controlador é feita por uma variável de selecção.

Neste trabalho restringe-se a família de modelos e controladores admitidos à classe dos sistemas lineares. No entanto, tal não inviabiliza o uso dos algoritmos estudados em processos não lineares, dado que a família de modelos lineares pode ser constituída pelo modelo linearizado do processo, nas diversas situações de funcionamento. O caso estudado que se apresentou relativamente ao campo de colectores solares mostra que o controlo comutado pode ser aplicado com êxito a sistemas não lineares.

Consideraram-se processos com diversas características, tendo-se para cada um deles estudado as possíveis soluções sob a perspectiva do controlo comutado. As principais contribuições originais desta tese são:

- **Processos com perturbações acessíveis.** Apresenta-se uma extensão dos resultados existentes, de modo a incluir controladores com efeito antecipativo das perturbações acessíveis. A estabilidade de controladores comutados com perturbações acessíveis é demonstrada no caso de processos discretos sem erros de modelação.

- **Processos variáveis no tempo.** Apresenta-se uma demonstração da estabilidade dos controladores comutados em processos lineares variáveis no tempo, sem erros de modelação e extende-se esse resultado na presença de dinâmica não modelada. Mostra-se que impondo uma taxa variação máxima ao processo se pode garantir a estabilidade do sistema controlado. Propõe-se ainda um algoritmo de supervisão, de sistemas variáveis no tempo, baseado em cadeias de Markov, como forma de tirar partido da informação que eventualmente exista sobre a variação do processo.

- **Processos com ocorrência de falhas.** Aplica-se o controlo comutado em sistemas com falhas e analisa-se o sistema controlado do ponto de vista do controlo tolerante a falhas. Comparam-se os diversos componentes do controlador comutado com as estruturas clássicas do controlo tolerante a falhas (detecção e identificação de falhas). Aborda-se ainda a questão da reconfiguração dos sistemas de controlo.

Os temas acima mencionados são estudados tanto do ponto de vista teórico, desenvolvendo ou estendendo resultados existentes sobre estabilidade e desempenho, como através de simulações e ensaios experimentais, que ilustram a aplicação dos algoritmos de controlo em casos reais.

São apresentados resultados de simulação e de ensaios experimentais em dois processos.

- **Sistema de três tanques** Aplicam-se controladores comutados num modelo não linear do sistema de três tanques, de modo a testar as capacidades de detecção e identificação de falhas do sistema de controlo. O controlador comutado executa com sucesso uma reconfiguração do sistema, a qual implica não só uma alteração na estrutura dos controladores mas também uma alteração nos objectivos de controlo.

- **Campo de colectores Solares** Aplicam-se algoritmos de controlo comutado no campo de colectores solares, o qual constitui um processo de escala industrial. Os algoritmos são testados em condições de funcionamento normais, avaliando-se a capacidade de resposta a perturbações externas, a mudanças súbitas na referência, e alterações no ponto de funcionamento, o qual depende principalmente da variável manipulada (o caudal de óleo no campo de colectores).

Este trabalho suscita diversas questões, quer do ponto de vista teórico quer de índole prática. Entre essas questões salientam-se as seguintes:

- Impor uma velocidade máxima na variação do processo que seja função da proximidade entre modelos vizinhos, e relacionar esta restrição com uma descrição da variação do processo de acordo com uma cadeia de Markov. Uma vez que a comutação entre sistemas próximos não afecta significativamente a estabilidade do sistema comutado, ao contrário da comutação entre sistemas que sejam muito diferentes entre si, é natural que o tempo de permanência a impor seja diferenciado.

- Análise formal da estabilidade de um sistema controlado, com o supervisor modificado pela estimação Bayesiana, considerando um processo cuja variação de parâmetros é descrita por uma cadeia de Markov.

- Construção dos modelos locais de modo a facilitar o discernimento entre modelos vizinhos, tendo em conta a banda de frequências mais relevante para a identificação e controlo.

- Método eficiente para decidir o número e a distribuição do modelos locais do supervisor (e os correspondentes controladores) que cobrem toda a família de processos admissíveis, em função dos requisitos de desempenho, estabilidade e robustez.

Bibliografia

[1] Agrachev, A. A., D. Liberzon, "Lie-Algebraic Stability criteria for switched systems" *SIAM J. Control Optimization*, **40**, 1, 253-269, (2001).

[2] Anderson, B. D. O., T. Brinsmead, F. Bruyne, J. Hespanha, D. Liberzon, A. S. Morse, "Multiple Model Adaptive Control - Part 1: Finite Controller Coverings" *Int. J. of Robust and Nonlinear Control*, **10**, 909-929, (2000).

[3] Åström, K., e B. Wittenmark, *Adaptive Control.* Addison Wesley, (1989).

[4] Barão, J. L. Lemos, M., Silva, R. N., "Reduced Complexity Adaptive Nonlinear Control of a Distributed Collector Solar Field", *J. of Process Control*, **12**, pág 131-141, (2002).

[5] H. Blom, Y. Bar-Shalom, "The interacting multiple model algorithm for systems with Markovian switching coefficients". *IEEE Trans. Aut. Control*, **33**, *8*, 780-783, (1988).

[6] Behrends, Ehrhard, "Introduction to Markov Chains", *Advanced Lectures in Mathematics*, Vieweg, (2000).

[7] Isard, M. and A. Blake (1998). "A mixed-state condensation tracker with automatic model-switching", *Proc. Int. Conf. Computer Vision*, 107-112.

[8] Borrelli, D., A. Stephen Morse, Edoardo Mosca, "Discrete-Time Supervisory Control of Families of Two-Degrees-of-Freedom Linear Set-Point Controllers", *IEEE Transactions on Automatic Control*, **Vol. 44**, 178-181.(1999).

[9] Brémaud, Pierre, "Markov Chains, Gibbs fields, Montecarlo simulations, and queues", *Spriger text's in applied Mathematics*, Springer, (1998).

[10] Camacho, E.; F. R. Rubio and J. A. Gutierrez, "Modelling and simulation of a solar power plant with distributed collector system", *IFAC Symp. on Power Systems Modelling and Control Applications*, Brussels, (1988).

[11] Camacho, E.; F. R. Rubio and F.M. Hughes M. “Self-Tuning Control of a Solar Power Plant with a Distributed Collector Field”, *IEEE control Systems*, April (1992).

[12] Camacho, E. and M. Berenguel. “Application of generalized predictive control to a solar power plant”, *Proc. Conf. Advances in Model-Based Predictive Control*, Oxford University, UK, September (1993).

[13] Camacho, E., M. Berenguel, F. R. Rubio, “Application of gain scheduling generalized predictive control to a solar power plant”, *Control Eng. Practice*,**Vol. 2**, 2, pág. 277-238, (1994).

[14] Coito, F., J. M. Lemos, R. N. Silva and E. Mosca, ”Adaptive control of a solar energy plant: Exploiting accessible disturbances”. *Int. J. Adaptive Control and Signal Proc.*, **11**, 327-342, (1997).

[15] Dalton, T., N Kremer, P.M. Frank, ”Application of Fuzzy Logic Based Methods of Residual Evaluation to the Three Tank Benchmark”, *ECC99, European Control Conference, Karlsruhe 99* , (1999)

[16] Fu, M., B. R. Barmish “Adaptive stabilization of linear systems via switching control”, *IEEE Trans. in Automat. Contr.* , **31**, 1097-1103, (1986).

[17] Gahinet, P., A. Nemirovski, A. J. Laub, “LMI Control Toolbox Users Guide”, *MathWorks*, (1995).

[18] Goodwin, G. C., K. S. Skin, “Adaptive Filtering Prediction and Control”, *Prentice-Hall. Englewood Cliffs, N. J.*, (1984).

[19] Greco, C., G. Menga, E. Mosca e G. Zappa, Performance improvements of self-tuning by multisteps horizon: the MUSMAR approach. *Automatica*, **20**, 681-699, (1984).

[20] C. Tsai and A. Haddad (1997). ”Averaging, aggregation and optimal control of singularly perturbed stochastic hybrid systems”, *Int. J. Control*, **68**, *1*, 31-50.

[21] Heiming, B., J. Lunze, ”Three-Tanks Benchmark Problem of Controller Reconfiguration”, *ECC99, European Control Conference, Karlsruhe 99*, (1999)

[22] Hespanha, J. P., ”Logic-Based Switching Algorithms in Control”, *PhD Thesis, Yale University*, (1999)

[23] Hespanha, J. P., ”Stability of switched systems with average dwell-time”, *38th Conf. on Decision and Control*, (1999)

[24] Hespanha, J. P., A. S. Morse, "Bounds on switching with scale-independent hysteresis" *In Frits W. Vaandrager and Jan H. van Schuppen, Hybrid Systems: Computation and Control*, 1569:117-122, (1999)

[25] Iosifesco, Marius, "Finite Markov Chains Processes and their Applications", *Wiley series in Probability & Mathematical Statistics*, John Wiley & Sons, (1980).

[26] Kailath, T., "Linear Systems", *Prentice-Hall Inf & Syst Sciences Series*, (1980)

[27] Khalil, H. K., "Nonlinear Systems", *MacMillan Publishing Company*, (1992).

[28] Köppen-Selinger, B., E. A. Garcia, P.M. Frank, "Fault Detection: Different Strategies for Modelling Applied to the Three-Tanks Benchmark - a Case Study", *ECC99, European Control Conference, Karlsruhe 99* , (1999)

[29] Kwakernaak, H. "Robust Control and H_∞-Optimization - Tutorial Paper", *Automatica*, vol. 29, 2, pág. 255-273, (1993).

[30] Liberzon, D., J. Hespanha, A. S. Morse, "Stability of switched systems: a Lie-algebraic condition", *Syst. & Control Letters*, **36**, 1-13, (1999)

[31] Lemos, J. M., " Adaptive LQ Control", *PhD thesis, Instituto Superior Técnico, Lisboa*, (1989)

[32] Lemos, J. M., J. S. Marques, L. Rato, "Hidden Markov Models for Switching Reconfigurable Control", *Controlo98, Coimbra, Portugal*, (1998)

[33] Lemos, J. M., L. M. Rato, J. S. Marques, "Switching Reconfigurable Control Based on Hidden Markov Models", *ECC99, European Control Conference, Karlsruhe 99* , (1999)

[34] Lemos, J. M., L. M. Rato, E. Mosca, "Integrating Predictive and Switching Control: Basic Concepts and an Experimental Case Study", *Capítulo de livro in* "Progress in Systems and Control Theory", Vol26., Birkhäuser Verlag, (2000)

[35] Lopez-Toribio, C. J., R. J. Patton, C. Batt, J. Chen, "Fault-Diagnosis of the 3 Tank System using Fuzzy Multiple Inference Modelling", *ECC99, European Control Conference, Karlsruhe 99* , (1999)

[36] Lunze, J., J. Schröder, "Qualitative Diagnosis of The 3-Tanks System", *ECC99, European Control Conference, Karlsruhe 99* , (1999)

[37] Maciejowski, J. M., "Reconfiguring control systems by optimizing", *ECC97, European Control Conference, Brussels 97* , (1997)

[38] Marcu, T., M. H. Matcovschi, P.M. Frank, "Neural Observer-Based Approach to Fault Detection and Isolation of a Three-Tanks System", *ECC99, European Control Conference, Karlsruhe 99* , (1999)

[39] Marcu, T., M. H. Matcovschi, P.M. Frank, "Neural Observer-Based Approach to Fault-Tolerant Control of a Three-Tanks System", *ECC99, European Control Conference, Karlsruhe 99* , (1999)

[40] Meaburn, A.; F. M. Hughes "Prescheduled Adaptive Control Scheme for Resonance Cancellation of a Distributed solar Collector field" *Solar Energy*, **Vol 52**, n.2, pág 155-166, (1994)

[41] Middleton, R. H., G. C. Goodwin, D. J. Hill, D. Q. Mayne. "Design of issues in adaptive control", *IEEE Trans. in Automat. Contr.* , **33**, 50-58, (1988).

[42] Morse, A. S., D. Q. Mayne, G. C. Goodwin, "Applications of hysteresis switching in parameter adaptive control", *IEEE Trans. in Automat. Contr.*, **37**, 1343-1354, (1992).

[43] Morse, A. S. "Dwell-time Switching", *European Control Conference, ECC93*, (1993).

[44] Morse, A. S. "Notes for an IEEE CDC Tutorial Workshop on Logic-Based Switching Strategies for Self-Adjusting Control", *Yale University, New Haven*, (1994).

[45] Morse, A. S., "Control Using Logic-Based Switching" in "Trends in Control- an European Perspective", A. Isidori (editor), *Springer-Verlag*, (1995).

[46] Morse, A. S. "Supervisory Control of Families of Linear Set-Point Controllers - Part 1: Exact matching", *IEEE Trans. Automat. Contr.*, **41**, 1413-1431, (1996).

[47] Morse, A. S. "Supervisory control of Families of Linear Set-Point Controllers - Part 2: Robustness", *IEEE Trans. Automat. Contr.*, **42**, 1500-1515, (1997).

[48] Morse, A. S. "A Bound for the Disturbance-to-Tracking-Error Gain of a Supervised Set-Point Control System", *in* "Perspectives in Control - Theory and applications", (Edt. Dorothée Normand-Cyrot) *Springer*, (1998)

[49] Mosca, E., "Optimal Predictive and Adaptive Control", *Prentice-Hall* (1995).

[50] Mosca, E., "Issues on switching supervisory control of uncertain noisy plants", *Proceedings of ADCHEM 2000, Pisa, Italy* (2000).

[51] Mosca, E., T.Agnoloni, "Closed-Loop Performance Inference for Controller Selection in Switching Supervisory Control", *ECC99, European Control Conference, Karlsruhe*, (1999)

[52] Mosca, E., F. Capecchi, A. Casavola "Designing Predictors for MIMO switching Supervisory Control", *Int Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, **vol 15**, *3*, 265-286.

[53] Narendra, K. S., J. Balakrishnan, M.Kemal Ciliz "Improving transient response of adaptive control systems using multiple models and switching", *Proc. of 32rd IEEE Conf. Decision Contr.*, Dezembro 93, (1993).

[54] Narendra, K. S., J. Balakrishnan, M.Kemal Ciliz "Adaptation and Learning using Multiple Models, Switching, and Tuning", *IEEE Control Systems*, June 95, 37-51, (1995).

[55] Narendra, K. S., J. Balakrishnan, "Adaptive control using multiple models", *IEEE Trans. in Automatic Control* , **42**, 171-187, (1997).

[56] Nichols, R. A., R. T. Reichert, W. J. Rugh, "Gain Scheduling for H-Infinity Controllers: A Flight Control Example", *IEEE Trans. in Automatic Control* , **vol. 1**, 2, pág. 69-79, (1993).

[57] Pait, F.M. and A. S. Morse "A Cyclic Switching Strategy for Parameter-adaptive Control", *IEEE Trans. in Automatic Control*, **39**, *6*, 1172-1183, (1994).

[58] Pait, F.M. and F. Kassab "On a class of switched robustly stable, adaptive systems", *Int. J. on Adaptive Control and Signal Processing*, (2001), to appear.

[59] Patton, R. N., "Fault Tolerant Control: The 1997 Situation", *IFAC Proceedings Safeprocess'97, Hull*, pág.1033-1055, (1997)

[60] Petridis, V. and A. Kehagias, "A Multi-Model Algorithm for Parameter Estimation of Time-varying Nonlinear Systems", *Automatica*, **34**, *4*, 469-475, (1998).

[61] Rabiner, L. R., "A Tutorial on Hidden Markov Models and Selected Applications in Speech Recognition". *Proc. IEEE*, **77**, *2*, 257-286, (1989).

[62] Rato, L. M., D. Borrelli, E. Mosca, J. M. Lemos, P. Balsa, "MUSMAR based switching control of a solar collector field" *ECC97, European Control Conference, Brussels 97*, (1997)

[63] Rato, L. M., R. N. Silva, J. M. Lemos, F. J. Coito, "Multirate MUSMAR cascade control of a distributed collector solar field" *ECC97, European Control Conference, Brussels 97*, (1997)

[64] Rato, L. M., J. M. Lemos, "Multimodel Based Fault Tolerant Control of the 3-Tank System" *ECC99, European Control Conference, Karlsruhe 99*, (1999)

[65] Ribeiro, M. I., "Lições sobre Sistemas Dinâmicos Lineares", *IST CAPS/DEEC*, (1990).

[66] Rubio, F. R.; M. Berenguel, E. Camacho. "Fuzzy Logic Control of a Solar Power Plant", *IEEE Trans. Fuzzy Systems*, **Vol 3**, n.4, 459-468, (1995).

[67] Rugh, Wilson J., "Linear System Theory", *Prentice-Hall, Thomas Kailath Edt.*, (1996).

[68] Sanchez, M.; M. Becker (Edt.) "Solar Thermal Test Facilities" Ref. SolarPACES Technical Report III-5/95, (1995)

[69] Silva, R. N., L. M. Rato, J. L. Lemos, "Observer-based Nonuniform Sampling Predictive Controller for a Solar Plant", *IFAC World Congress, Barcelona'02* , (2002).

[70] Silva, R. N., L. M. Rato, M. Barão, J. L. Lemos, "Physical Model Based Approach to Distributed Collector Solar Field Control", *IEEE American Control Conference ACC'02, Anchorage'02*, (2002).

[71] Silva, R. N., L. Rato, J. L. Lemos, F. Coito, "Cascade control of a distributed Collector Solar Field", *J. of Process Control*, **Vol 7**, n.2, pág 111-117, (1997).

[72] Söderström, T., P. Stoica, "System Identification", *Prentice-Hall. Englewood Cliffs, N. J.*, (1989).

[73] Staroswiecki, M.,A. L. Gehin, "Analysis of System Reconfigurability Using Generic Component Models" *International Conference on Control'98, Swansea (UK)* , (1998)

[74] Tugnait, J. K. "Detection and estimation for abruptly changing systems". *Automatica*, **18**, *5*, 607-615, (1982).

[75] Vidyasagar, M. "Nonlinear Systems Analysis" *Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J.*,(1993).

[76] Vinnicombe, G., "Measuring Robustness of Feedback Systems" *PhD Thesis, Cambridge University, U.K.*,(1993).

[77] Vinnicombe, G., "The Robustness of Feedback Systems with Bounded Complexity Controllers" *IEEE Trans. on automatic Control*, **Vol 41**, n 6, 795-803,(1993).